Zborník konferencie o vyučovaní matematiky na VŠ pomocou programového systému firmy

WOLFRAM RESEARCH, INC. USA
MATHEMATICA®

MATHEMATICA '99

VÝUČBA FOURIEROVÝCH RADOV S PODPOROU SYSTÉMU MATHEMATICA

Anna Kolesárová[1]

Katedra matematiky, Strojnícka fakulta STU

Abstrakt: *V príspevku sa zaoberáme možnosťou použitia programového systému Mathematica pri výučbe Fourierových radov.*

1. ÚVOD

Pri klasickom spôsobe vyučovania takmer celý čas, ktorý je v osnovách určený na Fourierove rady, sa venuje hľadaniu koeficientov Fourierovho radu zadanej funkcie, t.j. mechanickému výpočtu integrálov, prípadne vyšetrovaniu konvergencie zostaveného radu, určeniu jeho súčtu resp. nakresleniu grafu súčtu, prípadne určeniu súčtu niektorých číselných radov pomocou vhodných Fourierovych radov. Pretože výpočet integrálov, ktorými sú určené koeficienty Fourierovho radu, je často zdĺhavý, možnosti teoretického cvičenia sú v podstate vyčerpané.

Dôležitým problémom aproximácie funkcií pomocou Fourierovych polynómov, ktoré sú čiastočnými súčtami Fourierovho radu, sa na teoretických cvičeniach nie je možné zaoberať jednak z časových dôvodov, ale i preto, že tieto problémy si vyžadujú komplexnejšie výpočtové i grafické prostriedky na riešenie.

Programový systém Mathematica nám tieto možnosti poskytuje. Vďaka možnosti symbolického počítania môžeme ľahko vypočítať koeficienty Fourierovho radu a vďaka veľmi dobrým grafickým schopnostiam tohoto systému môžeme znázorniť aproximácie funkcie f pomocou n-tého Fourierovho polynómu F_n pre rôzne n a vzájomne ich porovnávať. Zlepšovanie aproximácie funkcie f pomocou polynómov s rastúcim n je možné overovať jednak

[1] Doc. RNDr. Anna Kolesárová, CSc, Katedra matematiky, Strojnícka fakulta STU,Námestie Slobody 17, 812 31 Bratislava, kolesarova@dekan.sjf.stuba.sk, kolesaro@cvt.stuba.sk

vizuálne (čo v prípade študentov je dôležité, pretože pre nich sa tým problém "zhmotní"), jednak môžeme počítať stredné kvadratické odchýlky funkcie f od n-tého Fourierovho polynómu F_n na intervale dĺžky jednej periódy T

$$\delta(f, F_n) = \sqrt{\int_a^{a+T} (f(t) - F_n(t))^2 \, dt}$$

a aj tak dokumentovať vlastnosť

$$\lim_{n \to \infty} \delta(f, F_n) = 0 ,$$

ktorú funkcie z uvažovanej triedy po častiach spojitých funkcií majú. Tým sa študenti prakticky stretávajú s problémami, ktoré boli teoreticky vysvetlené na prednáške.

Pomocou už vypočítaných koeficientov a_k, b_k môžeme vypočítať amplitúdy jednotlivých harmonických $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $k = 1, 2, ...$, resp. ukázať význam jednosmernej zložky $a_0/2$, zostaviť alebo znázorniť amplitúdové spektrum a pod. Cvičenie sa tým stáva pre študenta nielen zaujímavejším , ale dôležité je, že úlohy tohoto typu pomáhajú prehĺbiť pochopenie preberaného učiva.

2. UKÁŽKA ZADANÝCH ÚLOH

V nasledujúcej časti načrtneme riešenie dvoch zadaných úloh. Zdôrazňujeme, že postup ich riešenia súvisí s faktom, že ide o vyučovanie predmetu teoretického základu *len s podporou počítača*, preto pri riešení simulujeme postup teoretického výpočtu, nepoužívame na určenie Fourierovho polynómu alebo na určenie koeficientov a_k, b_k v kosinusovej resp. v sinusovej časti rozvoja možnosti, ktoré priamo ponúka program Mathematica.

ÚLOHA 1. Funkcia f je definovaná na ohraničenom intervale $< 0, 2 >$ predpisom $f(t) = t^2$.

a) Nájdite Fourierov rad funkcie f.
b) Zapíšte tretí Fourierov polynóm F_3.
c) Znázornite aproximáciu funkcie f pomocou tretieho a siedmeho Fourierovho polynómu. Porovnajte.
d) Určte strednú kvadratickú odchýlku $\delta_3 = \delta(f, F_3)$ a $\delta_7 = \delta(f, F_7)$ funkcie f od Fourierovych polynómov F_3 a F_7. Výsledky porovnajte.

□

Na výpočet koeficientov Fourierovho radu pre funkciu f definovanú na intervale $< a, a + T >$ používame vzorce v tvare

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos k\omega t \, dt \ , \quad k = 0, 1, 2, ... \ \text{a} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin k\omega t \, dt \ , \quad k = 1, 2, ...,$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Zo zadania úlohy vyplýva, že $T = 2$ a $\omega = \pi$, a preto počítame integrály

$$a_0 = \int_0^2 f(t)\ dt, \quad a_k = \int_0^2 f(t) \cos k\pi t\ dt, \quad b_k = \int_0^2 f(t) \sin k\pi t\ dt.$$

Po rozbore príkladu zadefinujeme funkciu f do počítača, vypočítame koeficienty, ako je ukázané v Prílohe 1 a zostavíme Fourierov rad

$$f \sim \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \cos k\pi t + \frac{-4}{k\pi} \sin k\pi t\ .$$

Ďalší postup riešenia je zrejmý z Prílohy 1, na cvičeniach však kreslíme grafy postupne a spájame ich v rôznych kombináciách pomocou príkazu Show. V príklade je pre študentov dôležité , že "vidia" aproximáciu funkcie pomocou čiastočných súčtov Fourierovho radu a majú možnosť vizuálne porovnávať zlepšovanie aproximácie so zvyšujúcim sa stupňom polynómu. Šikovní študenti si sami kreslia aj ďalšie aproximácie. Naviac, výpočtom stredných kvadratických odchýliek si overia závery aj numericky.

□□

ÚLOHA 2. Daná je funkcia f, ktorá je periodická s periódou $T = 1$ a na intervale periodicity $< 0, 1)$ je daná predpisom $f(t) = 2t - t^2$.

a) Nájdite Fourierov rad funkcie f.

b) Overte, že koeficient $a_0/2$ je rovný strednej hodnote funkcie f na intervale dĺžky jednej periódy.

c) Ak by sme na aproximáciu funkcie chceli použiť len jednosmernú zložku a tie harmonické, ktorých amplitúda je aspoň 20 % amplitúdy prvej harmonickej, koľko členov Fourierovho radu by sme mali použiť ?

d) Určte strednú kvadratickú odchýlku funkcie f od Fourierovho polynómu, ktorého stupeň ste určili v úlohe c).

e) Nakreslite príslušnú časť amplitúdového spektra.

□

Riešenie úlohy začíname kreslením grafu funkcie. Žiaľ, študenti si aj pri celkom jednoduchých funkciách pomáhajú počítačom. Spravíme rozbor úlohy, aby si uvedomili, že $T = 1,\ \omega = 2\pi$, a preto koeficietny dostanú výpočtom integrálov

$$a_0 = 2\int_0^1 f(t)\ dt, \quad a_k = 2\int_0^1 f(t) \cos 2k\pi t\ dt, \quad b_k = 2\int_0^1 f(t) \sin 2k\pi t\ dt.$$

Postup výpočtu koeficientov je uvedený v Prílohe 2, Fourierov rad zadanej funkcie je

$$f \sim \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2\pi^2} \cos 2k\pi t + \frac{-1}{k\pi} \sin 2k\pi t\ .$$

Amplitúdu k-tej harmonickej si pre jednoduchosť výpočtov definujeme ako funkciu premennej k. Ďalšiu časť úlohy riešia študenti zvyčajne len pokusne, postupným výpočtom hodnôt $A[2], A[3], \ldots$ a ich porovnávaním s hodnotou $0.2A[1]$ a (zvyčajne nie vedomým) využitím monotónnosti funkcie $A[k]$. V Prílohe 2 je ukázané efektívnejšie riešenie, podľa ktorého potrebujeme na aproximáciu polynóm štvrtého stupňa. Pomocou znázorneného amplitúdového spektra môžeme zdôrazniť, že amplitúdové spektrum periodickej funkcie je čiarové a harmonické a že podiel vyšších harmonických zložiek na tvorbe signálu postupne klesá.

□□

3. ZÁVER

V súčasnosti sa často diskutuje o vyučovaní matematiky pomocou počítačov. Problém, či má alebo nemá zmysel zavádzať počítače do vyučovania už v základnom kurze matematiky, je stále otvorený. Je dosť argumentov za i proti. Cieľom tohoto príspevku bolo ukázať, že počítač môže byť užitočný nielen na odstránenie zdĺhavých výpočtov, ale využitie výpočtových a grafických možností vhodného programu môže pomôcť prehĺbiť pochopenie mnohých problémov. A to je jeden z argumentov "za".

Literatúra

[1] Halada L., Kováčová M. : *Experimentálna výučba numerickej matematiky pomocou programového systému Mathematica na SjF STU* , Matematická štatistika a numerická matematika , Kálnica, 1.-5. júna 1999, pp. 142-150.

[2] Kováčová M. : *Možnosti nového prístupu k výučbe diferenciálnych rovníc na technických univerzitách*, Proceedings of the scientific conference INFORMATICS and ALGORITHMS'98, Prešov, 3.-4. sept. 1998, pp. 287-291.

[3] Záhonová V. : *Výučba integrálneho počtu funkcie jednej premennej s podporou programu Mathematica*, Zborník 25. konferencie VŠTEZ - Matematika v inžinierskom vzdelávaní, Trnava, 7.-8. sept. 1998, pp. 192-197.