

# Aplikácie programového systému *MATHEMATICA* v predmete Pružnosť a pevnosť.

Milada Omachelová

Katedra matematiky, Sjf STU, Bratislava, SK  
omachelova@sjf.stuba.sk

## Abstrakt

V tomto príspevku sa budeme zaoberať určovaním závislosti medzi napätím a pomerom priemerov drôtu na vstupe a výstupe pri jeho výrobe ťahaním za studena cez kuželovú maticu a hľadáním medznej hodnoty priemerov.

## Úvod

Technické odvetvia dnes napredujú veľmi rýchlo, vďaka praktickému využitiu výpočtovej techniky, ktorá umožnila skrátiť proces vývoja nových technológií a zariadení. Vyučovaci proces by nemal v tomto smere zaostávať. Je dôležité využívať nový software odbremeňujúci pedagóga aj študenta od zložitých, numericky, alebo časovo náročných výpočtov a poskytnúť im čas pre plnohodnotnejšiu tvorivú prácu, podporujúcu rozvoj technického a logického myslenia. Na katedre matematiky Sjf uz štvrtý rok prebieha výuka pomocou programového systému *MATHEMATICA*. Niektoré z možností tohto systému využiteľných v technickom vzdelávaní uvidíme na jednoduchom príklade z predmetu Pružnosť a pevnosť I., II.

**Príklad:** Pre výrobu drôtu ťahaním za studena cez kuželovú maticu (obr.1.), treba určiť závislosť medzi napätím  $\sigma_1$  a pomerom priemerov  $D_1/D_2$  a nájsť ich medznú hodnotu  $(D_1/D_2)_m$ . Materiál drôtu pritom budeme pokladať za ideálne pružne-plastický a uhol kuželovitosti matice za malý. Súčiniteľ trenia na stykovej ploche povrchu drôtu a matice je  $f$ . Šmykové napätie v priečných rezoch drôtu zanedbávame. Výsledok vyčísľite pre  $\alpha = 10^0$   $f = 0,2$ .

**Riešenie:** Metódou dvoch nekonečne blízkyh myslených rezov vjmeme element dĺžky  $dz$  (obr.2.) a účinok odstránených častí nahradíme vnútornými silami. Potom pre rovnováhu síl pôsobiacyh na snímaný element platí vzťah z [2]

$$\sigma \frac{\pi \cdot D^2}{4} = (\sigma + d\sigma) \frac{\pi}{4} (D + 2\alpha \cdot dz)^2 + p \left[ \frac{\pi (D + 2\alpha \cdot dz)^2}{4} - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right] + pf\pi \cdot D \cdot dz \quad (1)$$

obe strany rovnice vynásobíme  $\frac{4}{\pi}$  a upravíme.

(V príkazoch použijeme označenie  $\sigma$  -S,  $\sigma_{kt}$  -Skt,  $\alpha$  -A,  $D$ -DE).

In[1]:=

```
Together[(S+d*S)*(DE+2*A*dz)^2  
+p*((DE+2*A*dz)^2-DE^2)+4*p*DE*f*dz]
```

Out[1]=

$$4 A DE dz p + 4 A dz^2 p + 4 DE dz f p + DE^2 S + d DE^2 S + 4 A DE dz S + 4 A d DE dz S + 4 A dz^2 S + 4 A d dz^2 S$$

In[2]:=

%1-S\*DE^2//Simplify

Out[2]=

$$4 A DE dz (p + S + d S) + 4 A dz^2 (p + S + d S) + DE (4 dz f p + d DE S)$$

Zanedbáme nekonečne malé veličiny vyššieho rádu a dostaneme

$$4\alpha.D.dz(p + \sigma) + D(4.dz.f.p + d.\sigma.D) = 0$$

Rovnicu podelíme  $D^2$  a  $dz$  a jednoduchými algebraickými úpravami ju prevedieme na tvar

$$\frac{4\alpha}{D}(p + \sigma + p\frac{f}{\alpha}) + \frac{d\sigma}{dz} = 0 \quad (2)$$

Stav napätosti v bodoch prierezu je uvedený na obr.3. Intenzita napätí je  $\sigma_i = \sigma + p$ , ktorú určíme zo vzťahu

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3)$$

Pre náš prípad

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

po dosadení do (3)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma + p)^2 + (-p - p)^2 + (-p - \sigma)^2} = \sqrt{\sigma + p}$$

V diagrame na obr.3. je

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

Podmienka elasticity je splnená vtedy, ak

$$\sigma_i = \sigma + p = \sigma_{Kt} \text{ teda } p = \sigma_{Kt} - \sigma$$

Dosadením za  $p$  do rovnice (2) a úpravou dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{4\alpha}{D} \left( \frac{f}{\alpha} \sigma - \left(1 + \frac{f}{\alpha}\right) \sigma_{Kt} \right) \quad (4)$$

Z obr. 1. a 2. vyplýva, že  $D = D_1 + 2\alpha z$ , po dosadení do (4) vypočítame hodnotu  $\sigma$ .

In[3]:=

DSolve[S'[z]==4A/(D1+2\*A\*z)\*(f/A\*S[z]-(1+f/A)\*Skt),S[z],z]

Out[3]=

$$\left\{ \left\{ S[z] \rightarrow \frac{(A + f) \text{Skt}}{f} + (D_1 + 2 A z)^{(2 f)/A} C[1] \right\} \right\}$$

In[4]:=

**S=S[z]/.%3**

Teda 
$$\sigma = \sigma_{Kt} \left(1 + \frac{\alpha}{f}\right) + c(D_1 + 2\alpha.z)^{2f/\alpha} \quad (5)$$

Koštantu c určíme z okrajovej podmienky. Pre  $D = D_1 + 2\alpha.z = D_2$  je  $\sigma = 0$

In[5]:=

**Solve[S==0,C[1]]**

Out[5]=

$$\left\{ \left\{ C[1] \rightarrow -\left(\frac{(A + f) \text{Skt}}{f (D_1 + 2 A z)^{(2 f)/A}}\right) \right\} \right\}$$

In[6]:=

**%5/.D1+2\*A\*z->D2**

Out[6]=

$$\left\{ \left\{ C[1] \rightarrow -\left(\frac{(A + f) \text{Skt}}{D_2 f (D_1 + 2 A z)^{(2 f)/A}}\right) \right\} \right\}$$

Po dosadení integračnej koštanty do rovnice (5) dostaneme

In[7]:=

**S/.%6**

Out[7]=

$$\left\{ \left\{ \frac{(A + f) \text{Skt}}{f} - \frac{(A + f) \text{Skt} (D_1 + 2 A z)^{(2 f)/A}}{D_2 f} \right\} \right\}$$

a pre  $z=0$  je  $\sigma = \sigma_1$  teda po úprave

$$\sigma_1 = \sigma_{Kt} \left(1 + \frac{\alpha}{f}\right) \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{2f/\alpha}\right]$$

Medznú hodnotu  $D_1/D_2$  zodpovedajúcu vzniku plastickej deformácie na výstupe z matrice určíme z rovnice pre  $\sigma_1$ , ak dosadíme za  $\sigma_1 = \sigma_{Kt}$  potom

$$\sigma_{Kt} = \sigma_{Kt} \left(1 + \frac{\alpha}{f}\right) \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{2f/\alpha}\right]$$

In[8]:=

**Solve[Skt==Skt(1+A/f)\*(1-Podiel^(2f/A)),Podiel]**

Out[8]=

$$\left\{ \left\{ \text{Podiel} \rightarrow \left( -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+f}} \right) \frac{A/f}{\sqrt{A+f}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \text{Podiel} \rightarrow \left( \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+f}} \right) \frac{A/f}{\sqrt{A+f}} \right\} \right\}$$

Ak  $\alpha = 10^\circ$  potom z  $\frac{\bar{\alpha}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$  dostaneme  $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{18}$

Po dosadení číselných hodnôt vypočítame  $\left( \frac{D_1}{D_2} \right)_m$ .

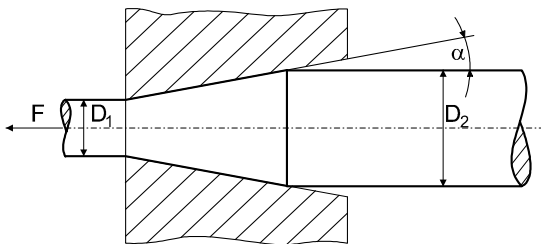
In[9]:=

```
%8/.{f->0.2,A->Pi/18}
```

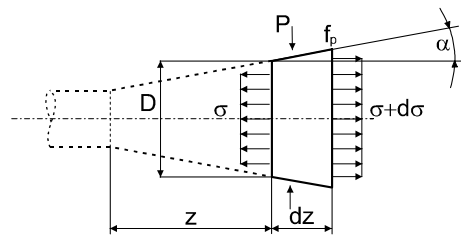
Out[9]=

```
{{Podiel -> -0.700485 + 0.29619 I}, {Podiel -> 0.760531}}
```

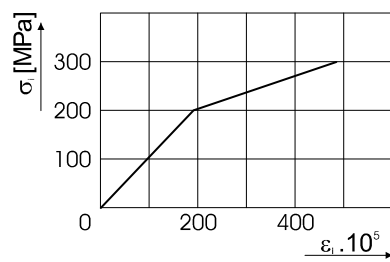
Teda  $\left( \frac{D_1}{D_2} \right)_m = 0.760531$



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

## **Záver**

Systém *MATHEMATICA* poskytuje užívateľom možnosti na rýchlu a efektívnu prácu so zložitými výrazmi, rieši diferenciálne rovnice, umožňuje zamerať sa na riešenie podstaty problému a nie na zvládnutie množstva matematických operácií.

## **Literatúra**

- [1] Puchner, O., Kamenský, A., Syč-Milý, J., Tesař, S.: Pružnosť a pevnosť II. Bratislava, STU 1999, ISBN 80-227-1198-5
- [2] Syč-Milý, J. a kol.: Pružnosť a pevnosť - riešené príklady – skriptá. Bratislava, Alfa 1988, ISBN 063-802-87
- [3] Kováčová, M.: Možnosti nového prístupu k výučbe dif. rovníc na technických univerzitách, Proceedings of the Scientific Conference with International Participation. INFORMATICS AND ALGORITHMS '98. Prešov 3. - 4. sept. 1998, pp.287-291
- [4] Kováčová, M.: Numerické riešenie dif. rovníc a systémov pomocou numerických funkcií systému MATHEMATICA. MATHEMATICA 99. Bratislava 29.6.-2.7. 1999, pp.77-92