VÝUČBA INTEGRÁLNEHO POČTU FUNKCIE JEDNEJ PREMENNEJ S PODPOROU PROGRAMU MATHEMATICA

Viera Záhonová

KM SjF STU, Námestie Slobody 17, Bratislava
zahonova@dekan.sjf.stuba.sk

Abstrakt. V príspevku sú popísané niektoré možnosti použitia programového systému Mathematica pri výučbe integrálneho počtu funkcie reálnej premennej. Sú tu popísané základné myšlienky integrovania racionálnej funkcie a goniometrických funkcií.

1. Úvod

Katedra matematiky Strojníckej fakulty STU zabezpečuje výučbu matematiky na fakulte v základnom kurze, ako aj vo voliteľných predmetoch tretieho a štvrtého ročníka na špecializovaných katedrách. Základný kurz je v prvom až štvrtom semesti. V školskom roku 1996/97 a 1997/98 na katedre sa rozbehla experimentálna výučba pomocou programového systému Mathematica, ktorý bol vyvinutý spoločnosťou Wolfram Research (USA) a je určený na výučbu matematiky na vysokých školách.Táto experimentálna výučba sa začína v druhom semestri v základnom kurze a tiež prebieha aj v štvrtom ročníku na špecializácii Aplikovaná matematika v predmete Matematika I AM [1, 3, 4, 5, 6]. Cieľom tohto experimentu je pomocou počítača urýchliť niektoré rutinné výpočtové postupy, ktoré študent už ovláda a zamerať sa na lepšie osvojenie si nových pojmov a rozvíjanie matematického myslenia.

2. Výpočet neurčitého integrálu - základné metódy.

Pri experimentálnej výučbe sme sa zamerali na to, aby študent si osvojil výpočet neurčitého integrálu pomocou základných integračných vzorcov. Ďalej je nutné, aby ovládal metódu per partes a substitučnú metódu pre výpočet neurčitého integrálu. Taktiež integrovanie základných elementárnych zlomkov tvaru $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $M, N, p, q \in R,\ p^2-4q \langle 0$ by malo byť samozrejmosťou. Tieto úlohy sa riešia na tzv. teoretických cvičeniach, ktoré sú s cvičeniami pri počítači v rovnakom pomere.

3. Integrovanie racionálnej funkcie.

Programový systém Mathematica sa dá vhodne využiť pri integrovaní racionálnej funkcie. Nech funkcia $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa *n* a *m* je rýdzoracionálna, t.j. $n\langle m$. Je známe, integrál z tejto funkcie vypočítame pomocou rozkladu na elementárne zlomky [2].

Úloha 1. Vypočítajte $\int\dfrac{4}{x^3+x+2}dx$.

Riešenie: Najskôr potrebujeme nájsť rozklad menovateľa na súčin ireducibilných polynómov.Tu nám pomôže príkaz $Factor\left[Q_m(x)\right]$

In[1]:=

```
Factor[x^3+x+2]
```

Out[1]=

```
                    2
(1 + x) (2 - x + x )
```

Navrhneme tvar elementárnych zlomkov.

In[2]:=

```
a/(1+x)+(b*x+c)/(x^2-x+2)
```

Out[2]=

```
  a       c + b x
----- + ----------
1 + x            2
        2 - x + x
```

Pomocou príkazu $Together[výraz]$ tieto zlomky sčítame.

In[3]:=

```
Together[%2]
```

Out[3]=

```
                                   2      2
2 a + c - a x + b x + c x + a x  + b x
---------------------------------------
                               2
          (1 + x) (2 - x + x )
```

Teraz ľahko zostavíme sústavu rovníc a budeme ju riešiť.

In[4]:=

```
Solve[{2a+c==4,-a+b+c==0,a+b==0},{a,b,c}]
```

Out[4]=

```
{{a -> 1, b -> -1, c -> 2}}
```

In[5]:=

```
%2/.%4[[1]]
```

Out[5]=

```
  1        2 - x
----- + ----------
1 + x            2
        2 - x + x
```

Danú funkciu sme rozložili na elementárne zlomky a môžeme vypočítať integrál.

In[6]:=

```
Integrate[%5,x]
```

Out[6]=

```
             -1 + 2 x
3 ArcTan[--------]                                 2
             Sqrt[7]                    Log[2 - x + x ]
------------------ + Log[1 + x] - ---------------
     Sqrt[7]                                   2
```

Teda $\int \frac{4}{x^3+x+2}dx = \frac{3}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + \ln|1+x| - \frac{\ln(x^2-x+2)}{2} + c,\ c \in R$. (1)

Rozklad rýdzoracionálnej funkcie môžme získať aj v jednom kroku pomocou príkazu $Apart\left[\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\right]$. To však slúži pre študentov iba na kontrolu.

In[7]:=

```
Apart[4/(x^3+x+2)]
```

Out[7]=

```
  1        2 - x
----- + ----------
1 + x            2
        2 - x + x
```

Nech teraz funkcia *f(x)* nie je rýdzoracionálna, t. j. $n \geq m$. Potom funkcia *f(x)* sa dá napísať ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, čo už vieme integrovať. Nech teda $f(x) = A_l(x) + \frac{B_s(x)}{Q_m(x)}$, kde $A_l(x), B_s(x)$ sú polynómy, $l = n - m$ a $s \langle m$ [2].

Výsledkom príkazu $PolynomialQuotient[P_n(x), Q_m(x), x]$ je polynóm $A_l(x)$, výsledkom príkazu $Polynomial\,\mathrm{Re}mainder[P_n(x), Q_m(x), x]$ je polynóm $B_s(x)$.

Úloha 2. Vypočítajte $\int \frac{x^5+2x^2-x+2}{x^3+x+2}dx$.

Riešenie: Rozložme danú funkciu na súčet polynómu a racionálnej funkcie.

In[8]:=

```
PolynomialQuotient[x^5+2x^2-x+2,x^3+x+2,x]
```

Out[8]=

```
      2
-1 + x
```

In[9]:=

```
PolynomialRemainder[x^5+2x^2-x+2,x^3+x+2,x]
```

Out[9]=

```
4
```

Dostali sme, že $\dfrac{x^5+2x^2-x+2}{x^3+x+2} = x^2 - 1 + \dfrac{4}{x^3+x+2}$.

Vidíme, že rýdzoracionálna funkcia je funkciou z predchádzajúceho príkladu, a preto využijeme tento výsledok. Potom:

$$\frac{x^5+2x^2-x+2}{x^3+x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + (1)$$

4. Integrovanie goniometrickýck funkcií.

Programový systém Mathematica je vhodný pri výpočte integrálov pomocou substitúcie $t = tg\dfrac{x}{2}$, kde pri použití tejto substitúcie sú potrebné zdĺhavé úpravy algebrických výrazov. Úlohy, kde nie je nutné použiť túto všeobecnú substitúciu je vhodnejšie riešiť priamo, bez použitia počítača. Použitie všeobecnej substitúcie si ukážeme priamo na príklade.

<u>Úloha 3</u>. Vypočítajte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

<u>Riešenie</u>:

In[10]:=

```
Sin[x]/(1+Sin[x]+Cos[x])
```

Out[10]=

```
      Sin[x]
-------------------
1 + Cos[x] + Sin[x]
```

Pri substitúcii $t = tg\dfrac{x}{2}$ je $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Po dosadení dostaneme:

In[11]:=

```
%10/.{Sin[x]->2t/(1+t^2),Cos[x]->(1-t^2)/(1+t^2)}
```

Out[11]=

```
                2 t
------------------------------
                              2
      2         2 t      1 - t
(1 + t ) (1 + ------ + ------)
                   2        2
              1 + t    1 + t
```

In[12]:=

```
%11*2/(1+t^2)
```

Out[12]=

```
                 4 t
-------------------------------
                               2
      2 2        2 t      1 - t
(1 + t )  (1 + ------ + ------)
                    2        2
               1 + t    1 + t
```

Daný výraz, ktorý sme dostali zjednodušíme.

In[13]:=

```
%12//Simplify
```

Out[13]=

```
      2 t
---------------
         2    3
1 + t + t  + t
```

Dostali sme racionálnu funkciu, ktorú už vieme integrovať.

Podobne ako pri integrovaní goniometrických funkcií, programový systém Mathematica sa dá využiť aj na výpočet integrálov z iracionálnych funkcií. Vhodné je jeho použitie hlavne pri integráloch, kde sa používajú Eulerove substitúcie a kde vznikajú zložité algebrické výrazy. Pri integráloch iracionálnej funkcie kde sa vyskytuje $\sqrt[k_i]{ax+b},\ k_i \in N,\ \ i = 1,2,...n$, je výhodnejšie najskôr si danú funkciu upraviť vhodnou substitúciou na racionálnu a až potom použiť počítač.

5. Záver.

Na záver by bolo vhodné ešte opäť pripomenúť, že programový systém Mathematica nenahrádza výučbu matematiky, ale jej pomáha. Vhodnou voľbou tématických celkov programový systém Mathematica je pomôckou, ktorá odstraňuje mechanické počítanie a umožňuje väčší výber „pekných“ príkladov, v ktorých je dôležitá najmä logika. Ak by sa umožnilo používať študentovi programový systém

Mathematica počas celého jeho štúdia, jeho práca by sa nielen zefektívnila, ale by bol pripravený aj na presné riešenie náročných úloh.

Literatúra

1. Halada, L.: Stabilita úloh a algoritmov vo výučbe numerickej matematiky na Sjf STU, Informatika a Algoritmy, Prešov, 3.-4. September 1998.
2. Ivan, J.: Matematika 1, Alfa, Bratislava,1986.
3. Kolesárová, A .; Kováčová, M.; Záhonová, V.: Použitie programového systému Mathematica pri výučbe základov matematickej analýzy na SjF STU, Matematická štatistika a Numerická matematika, Kalnica, 1.-5. Júna 1998.
4. Kováčová, M.: Prípravné materiály experimentálnej výučby na SjF STU.
5. Kováčová, M.: Možnosti nového prístupu k výučbe dif. rovníc na Technických univerzitách, Informatika a Algoritmy, Prešov, 3.-4. September 1998.
6. Kováčová, M.: Výučba diferenciálneho počtu funkcie viac premenných s podporou programového systému Mathematica, In.: 25 VŠTEP-Z Matematika v inžinierskom vzdelávaní, Trnava, 7.-10. September 1998.