Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou
Informatika a algoritmy '2000
Fakulta výrobných technológií Technickej univerzity Košice so sídlom v Prešove
Prešov 7. a 8. septembra 2000

PRAVDEPODOBNOSŤ POMOCOU PG. SYSTÉMU *MATHEMATICA®* (PROBLEM-SOLVING APPROACH)

OMACHELOVÁ MILADA

Katedra Matematiky, Strojnícka Fakulta STU, Námestie Slobody 17,
812 31 Bratislava, omachelova@sjf.stuba.sk

Abstrakt: V článku sú popísané možnosti využitia programového systému *MATHEMATICA* pri výučbe pravdepodobnosti na vysokých školách. Je to jedna z možností, ako môžu študenti využívať teoretické vedomosti a programové vybavenie na riešenie praktických úloh.

Kľúčové slová: *MATHEMATICA®,* pravdepodobnosť

KAPITOLA 1

V oblasti matematickej štatistiky sa vyskytujú problémy, ktorých sa učiteľ na prednáškach dotkne len okrajovo, z dôvodu nedostatku času, alebo komplikovanosti dôkazového materiálu. Často však nejde ani o jeden z týchto dôvodov. V pravdepodobnosti a štatistike sa vyskytuje veľmi veľa úloh formulovateľných tak, aby nadväzovali na praktické skúsenosti študentov. Dá sa samozrejme diskutovať o tom, či úlohy takého charakteru, ako sú uvedené v nasledujúcej kapitole patria do predmetu pravdepodobnosť a štatistika na vysokých školách, ale ich prostredníctvom možno vyučovanie spestriť a nenásilným spôsobom prejsť aj k ťažším problémom. Pri ich prezentácii by mohla pomôcť *MATHEMATICA*. Vďaka svojim veľmi dobrých grafickým schopnostiam a veľmi jednoduchému metajazyku poskytuje možnosť zefektívniť výučbu. Ak študenti prejdú v prvom, prípadne druhom ročníku úvodným kurzom pre používanie prog. systému *MATHEMATICA*, sú schopní v krátkom čase zvládnuť nové príkazy a zaradiť ich do súboru svojich poznatkov. Využijú ich pri modelovaní príkladov zo štatistiky a pravdepodobnosti, pripadne pri vytváraní simulácií rôznych úloh. Cieľom príkladov uvedených v tomto článku je presvedčiť študentov o správnosti tvrdení, ktoré sú prezentované na prednáškach v tvare viet.

Pre zoznámenie sa so základnými príkazmi a technikami obvykle volíme príklady o hodoch kockou. Uveďme dva z nich:

Príklad 1:
Generujte 100 náhodných hodov kockou a vypočítajte strednú hodnotu (prípadne ďalšie charakteristiky daného súboru dát).

In[1]:=
```
test= Table[Random[Integer,{1,6}],{10}]
```
Out[1]=
```
{4, 6, 5, 1, 6, 5, 5, 4, 5, 6}
```

Ked chceme vidieť začiatok súboru, ale nezaujímajú nás všetky dáta, existuje okrem bodkočiarky aj prikaz pre skrátenie *Short.*

In[2]:=

```
test1= Table[Random[Integer,{1,6}],{1000}];
```

In[3]:=

```
Short[Table[Random[Integer,{1,6}],{1000}]]
```

Out[3]//Short=

```
{4, 3, 2, 6, 1, 2, 4, 2, 4, 4, 6, 2, 4, <<981>>, 3, 5, 3, 6, 1, 1}
```

Všetky základné príkazy pre výpočty priemeru, strednej hodnoty, disperzie atď. sú v balíku *Statistics*, ktorý musíme načítať:

In[4]:=

```
Needs["Statistics`DescriptiveStatistics`"]
```

Vypočítajme napríklad priemer testovaných súborov:

In[5]:=

```
Mean[test]//N
```

Out[5]=

```
4.7
```

In[6]:=

```
Mean[test1]//N
```

Out[6]=

```
3.446
```

Príklad 2:
Použime opäť predchádzajúci testovací súbor a zisťujeme, akú hodnotu má priemer súčtu testovaných súborov (po zložkách)

In[7]:=

```
Mean[test1+test1]//N
```

Out[7]=

```
6.892
```

1.1 Problémy z konečnej teórie pravdepodobnosti:

Príklad 3:
Nájdite pravdepodobnosť, že pri hode kockou 3 x za sebou dostaneme postupnosť rastúcich čísel. Tento problém sformuloval vo svojej práci [Chung 79]
Riešenie:
Použime metódu Monte Carlo. V *MATHEMATICE* urobíme simuláciu tejto metódy, ktorá bude generovať 10 000 pokusov, každý pokus bude pozostávať z trojice náhodných prirodzených čísel z intervalu [1,6]. Potom spočítame počet tých pokusov, v ktorých sú čísla zoradené vzostupne a vypočítame pravdepodobnosť uvedenej udalosti. Testovaciu funkciu nazvime *rastuca*

In[8]:=

```
rastuca[{x_,y_,z_}]:= x< y< z
```

In[9]:=

```
test=Table[Random[Integer,{1,6}],{10000},{3}];
```

In[10]:=

```
dobre=Length[Select[test,rastuca]]
```

Out[10]=

```
900
```

Hľadaná pravdepodobnosť je:

In[11]:=

```
dobre/Length[test]//N
```

Out[11]=

```
0.09
```

Ďalšia možnosť, ako získať presné riešenie je preskúmať všetky možnosti. Tento prístup si vyžaduje zovšeobecnenie príkazu *Outer*

In[12]:=

```
VsetkyUdalosti=Partition[
          Flatten[Outer[ List,Range[1,6],Range[1,6],Range[1,6]]],3];
```

In[13]:=

```
RastuceUdalosti=Select[VsetkyUdalosti,rastuca]
```

Out[13]=

```
{{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 2, 6}, {1, 3, 4},
 {1, 3, 5}, {1, 3, 6}, {1, 4, 5}, {1, 4, 6}, {1, 5, 6},
 {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 3, 6}, {2, 4, 5}, {2, 4, 6},
 {2, 5, 6}, {3, 4, 5}, {3, 4, 6}, {3, 5, 6}, {4, 5, 6}}
```

In[14]:=

```
PresnaPravdepodobnost=
      Length[RastuceUdalosti]/Length[VsetkyUdalosti]//N
```

Out[14]=

```
0.0925926
```

Priklad 4:
Úlohou je vybrať 4 kusy topánok z piatich rôznych párov. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi bude aspoň jeden pár k sebe patriacich topánok. [CHung 1979]
Riešenie: 10 topánok si zoradíme do nasledujúceho listu.

In[15]:=

```
topanky={1,2,3,4,5,1,2,3,4,5};
```

Potom vezmeme vsetky možné štvorice, ale musíme natiahnuť kombinatorický balík , ktorý generuje práve takéto štvorice

In[16]:=

```
Needs["DiscreteMath`Combinatorica`"]
```

In[17]:=

```
stvorice=KSubsets[topanky,4];
Short[stvorice]
```

Out[17]//Short=

```
{{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 1}, <<206>>,
 {2, 3, 4, 5}}
```

Overíme, že sme našli skutočne všetky štvorice

In[18]:=

```
Length[stvorice]==Binomial[10,4]
```

Out[18]=

```
True
```

Ak sa vo vybranej štvorici nevyskytuje žiaden pár topánok, potom dĺžka vybranej stvorice (pomocou *Intersection*) bude práve 4

In[19]:=

```
?Intersection
```

```
Intersection[list1, list2, ... ] gives a sorted list of the elements
common to all the listi.
```

In[20]:=

```
ZiadnyPar[x_List]:=Length[Intersection[x]]==4
```

Štvorice, ktoré neobsahujú žiaden pár určíme nasledovne

In[21]:=

```
vyber=Select[stvorice,ZiadnyPar];
```

In[22]:=

```
Short[vyber]
```

Out[22]//Short=

```
{{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 4}, <<76>>,
 {2, 3, 4, 5}}
```

Hľadaná pravdepodobnosť, že v štvorici topánok je jeden pár, je:

In[23]:=

```
Length[vyber]/Length[stvorice]//N
```

Out[23]=

```
0.380952
```

1.2 Teória geometrickej pravdepodobnosti

V úvodnej prednáške týkajúcej sa tejto teórie sú študenti obvykle zoznamovaní s príkadom, ako vypočítať hodnotu čísla π. Ukážeme, že je pomerne jednoduché simulovať tento problém pomocou programu *MATHEMATICA*.

Jedna cesta je nasledovná: Generujme 3000 bodov, ktoré ležia v štvorci [0,2] x [0,2] a zafarbime ich na zeleno. Potom vyberme body, ktoré ležia vo vnútri kruhu a zafarbime ich na červeno. Očakávame samozrejme, že pomer počtu červených bodov ku počtu zelených bodov bude rovnaký, ako pomer plochy kružnice ku ploche štvorca (Pi/4). Potom hodnotu Pi vypočítame ako 4 * pravdepodobnosť udalosti, že bod padne do kruhu.

Je to obľúbený problém, pomocou ktorého je možné veľmi pekne vysvetliť, čo je to geometrická pravdepodobnosť.

Ukážme simuláciu pomocou prog. systému *MATHEMATICA*.

Najskôr definujme funkciu, ktorá bude testovať, či sa bod nachádza vo vnútri kruhu s polomerom 1 a so stredom v bode (1,1).

In[24]:=

```
VnutroKruhu[{x_,y_}]:= (x-1)^2 + (y-1)^2 <=1
```

Teraz generujme náhodne 3000 bodov, ktoré ležia vo vnútri štvorca [0,2] x {0,2]

In[25]:=

```
body=Table[{Random[Real,{0,2}],
            Random[Real,{0,2}]},{3000}];
```

Pomocou testovacej funkcie VnutroKruhu vyberme tie body, ktoré skutočne ležia v kruhu

In[26]:=

```
BodyvKruhu=Select[body,VnutroKruhu];
```

Aby sme mohli body aj zafarbiť, potrebujeme otvoriť grafický balík obsahujúci definície farieb:

In[27]:=

```
Needs["Graphics`Colors`"]
```

In[28]:=

```
CerveneBody={Red,Map[Point,BodyvKruhu]};
```

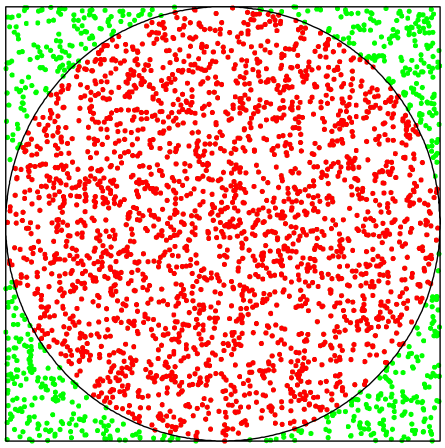
In[29]:=

```
ZeleneBody={Green,Map[Point,body]};
```

Ľahko nakreslíme zodpovedajúci obrázok

In[30]:=

```
Show[Graphics[{PointSize[0.01], ZeleneBody, CerveneBody,
Circle[{1,1},1], Line[{{0,0},{0,2},{2,2},{2,0},{0,0}}]}, AspectRatio-
>Automatic]]
```



Out[30]=

```
-Graphics-
```

Vypočítame hľadanú pravdepodobnosť:

In[31]:=

```
Print["Pi je približne  ", 4 Length[BodyvKruhu]/Length[body]//N]
```

```
Pi je približne  3.11333
```

ZÁVER

Prínos prog. systému *MATHEMATICA* pre učiteľa je v možnosti vyučovať pravdepodobnosť novou príťažlivou formou. Prednosť prog. systému *MATHEMATICA* oproti iným štatistickým balíkom je v jeho mnohostrannom použití. Pre pedagóga to znamená hlavne ušetrený čas, pretože stačí ovládať jeden systém, ktorý mu poskytne všetok potrebný komfort.

Návody ako možno pomocou jedného software zrátať všetko potrebné od algebry cez analýzu, geometriu, numeriku, až po pravdepodobnosť a štatistiku a využiť to v príprave na vyučovanie na vysokých školách, čitateľ nájde vo viacerých prácach, uvedených v zozname použitej literatúry, aj v základnom calcule a v predmete numerická matematika. Zahŕňajú viacročné skúsenosti s výučbou pomocou tohoto programového systému na SjF STU.

LITERATÚRA:

[1] Chung, K.L. Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Springer Verlag, NewYork 1979.

[2] Kováčová M.: *Výučba diferenciálneho počtu funkcie viac premenných pomocou pg. systému Mathematica,* In: Zborník 25. konferencia VŠTEZ - Matematika v inžinierskom vzdelávaní, Trnava 7. -10. sept. 1998, pp. 173-180

[5] Kováčová M.: *Možnosti nového prístupu ku výučbe dif. rovníc na technických univerzitách,* In: Proceedings of the scientific conference with international participation, INFORMATICS AND ALGORITHMS '98, Prešov 3. - 4. sept. 1998, pp. 287-291

[7] Záhonová V.: *Lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu s konštantnými koeficientami a program. systém MATHEMATICA ,* In: ***MATHEMATICA* 99,** Bratislava 29.júna - 2.júla 1999, pp. 123-130

[8] Kolesárová A.: *Výučba Fourierových radov s podporou programového systému Mathematica,* In: ***MATHEMATICA* 99,** Bratislava 29.júna - 2.júla 1999, pp. 43-50

[9] Kováčová M.: *Numerické riešenie dif. rovníc a systémov pomocou numerických funkcií systému MATHEMATICA ,* In: ***MATHEMATICA* 99,** Bratislava 29.júna - 2.júla 1999, pp. 77-92

[11] Kováčová M.: *N Function of MATHEMATICA and Some Notices to Numerical Quadrature,* In: Matematická štatistika a Numerická matematika, Kálnica 14. - 18. júna 1999, pp. 131-140