MOŽNOSTI NOVÉHO PRÍSTUPU KU VÝUČBE DIF. ROVNÍC NA TECHNICKÝCH UNIVERZITÁCH

KOVÁČOVÁ MONIKA

Katedra Matematiky Strojníckej Fakulty STU,
Námestie Slobody 17, 812 31 Bratislava
07/3596 219, kovacova_v@dekan.sjf.stuba.sk

Abstract: V článku popisujeme základné myšlienky experimentálnej výučby na Sjf STU. Uvádzame možnosti zavedenia programového systému Mathematica do výučby. Hlavným zámerom experimentu bolo odstrániť mechanické počítanie a upozorniť na možnosť riešiť technicky náročné úlohy . Zameriavame sa predovšetkým na oblasť diferenciálnych rovníc. Modelovým príkladom je fyzikálny problém prehybu tyče.

Kľúčové slová: Mathematica, diferenciálne rovnice, experimentálna výučba.

1.ÚVOD

Výučbu matematiky na našej fakulte možno rozdeliť do dvoch skupín (principiálne rozdielneho charakteru). Jednou skupinou je „základný kurz“ matematickej analýzy (prvé štyri semestre), druhou sú voliteľné predmety v 3. - 5. ročníku (napr. Aplikovaná matematika, Matematická štatistika). Toto rozdelenie určuje nielen charakter predmetu, ale aj počet a vedomostnú úroveň študentov. Je samozrejmé, že lepšie sa pracuje so študentmi vyšších ročníkov, ktorí si matematiku volia ako odporúčaný predmet.

Základný kurz zahŕňa 3 semestre matematickej analýzy a 1 semester numerickej matematiky.

Experimentálna výučba pomocou programového systému Mathematica prebiehala v 2. až 4. semestri „základného kurzu“ a v predmete Aplikovaná matematika v posledných dvoch školských rokoch. Obsahom predmetu Aplikovaná matematika je lapl. transformácia, four. transf., okrajové úlohy ODR a úvod do problematiky PDR.

Hlavným zámerom experimentu bolo odstrániť mechanické počítanie „vhodných príkladov s peknými výsledkami“ a ponúknuť možnosť riešiť príklady, v ktorých je dôležitá hlavne logika uvažovania (samotné technické pozadie výpočtu realizovať pomocou programového systému Mathematica). Samozrejme základné princípy derivovania a integrovania sme zachovávali, snažili sme sa len o posilnenie schopnosti samostatnej logickej úvahy pri riešení problémových úloh.

2.POPIS EXPERIMENTÁLNEJ VÝUČBY

V šk. rokoch 1996/97 a 1997/98 prebiehala na SjF STU experimentálna výučba pomocou programového systému Mathematica (Wolfram Research). V nasledujúcej časti len stručne opíšeme priebeh experimentu. Podrobnejší popis experimentu možno nájsť v prácach [2,3,4,7].

V prvom roku bolo do experimentu zaradených 50 študentov (momentálne ukončili 4 semester) a 15 študentov štvrtého ročníka (Aplikovaná matematika), v druhom 120 študentov (najmenšia organizačná jednotka - paralelka, ktorá má samostatné prednášky) a opäť 15 študentov štvrtého ročníka.

Už v prípravnej fáze experimentu bola vypracovaná koncepcia výučby a spôsob hodnotenia, v priebehu rokov 1996, 1997 postupne vznikali pomocné študijné materiály, nootebooky a packages pre študentov, ktoré sme neskôr použili priamo v pedagogickom procese.

Rozsah výučby sú 3-4 hodiny prednášok a 4 (2) hodiny cvičení. V rámci prednášok okrem teórie calculu sa prednášajúci venoval aj možnostiam pg. systému Mathematica. Cvičenia boli rozdelené na 2+2 (teoretické a počítačové). *Teoretické cvičenia* sú klasickými cvičeniami, ktorých hlavnou úlohou je precvičiť myšlienkové postupy a metódy riešení úloh na výpočtovo jednoduchých príkladoch. *Počítačové cvičenia* sa uskutočňujú v samostatnej učebni, pri počítači pracujú súčasne dvaja študenti. Táto možnosť sa ukázala na základe našich skúseností ako najvýhodnejšia. Skúška je rozdelená na dve časti. Počas počítačovej časti sedí študent sám pri počítači a rieši niekoľko výpočtovo zložitých úloh s použitím dostupných programových prostriedkov. Počas teoretickej časti pracuje samostatne na jednoduchých úlohách.

3.PROGRAMOVÝ SYSTÉM MATHEMATICA

Programový systém MATHEMATICA, ktorý bol vyvinutý spoločnosťou Wolfram Research© (USA), je cielene určený pre výučbu matematiky na univerzitách a na vysokých školách technického zamerania, ako aj pre vedecké výpočty. A System For Doing Mathematics For Computer - to je úplný podtitul systému, ktorý sa pomaly stáva samostatným vedným odborom. Tomuto cieľu je prispôsobené celkové prostredie Mathematice, ako aj prostredia aplikačných balíkov. Program vo svojej verzii 3.1 dosiahol takú úroveň, že zvládne aj vedecko-technické výpočty základného výskumu.

V súčasnej dobe teda už nejde ani náhodou len o výukový program. Len stručne pripomenieme, že tento systém má vytvorený kompletný metajazyk (v poslednej verzii, veľmi komfortne použiteľný). Rovnako perfektne fungujú linky s knižnicami v C (C++) , resp.vo Fortrane (ideálna podpora vedecko-technických výpočtov).

V USA existuje veľké množstvo grantových úloh, ktorých úlohou bolo vytvoriť ucelenú koncepciu výučby práve pomocou tohto systému. Z najznámejších by som spomenula projekty: Calculus & Mathematica, Metric, La-Fayete School Lab, Mathew-Lab. Koncepcia nášho školského systému od základnej školy až po vysoké školstvo, však nie je taká, aby sme mohli výsledky týchto grantových úloh prebrať a použiť vo výučbe. V našom experimente sme preto museli vytvoriť novú koncepciu, primeranú jednak nášmu technickému vybaveniu, jednak vedomostnej úrovni študentov, ktorí študujú na technických univerzitách.

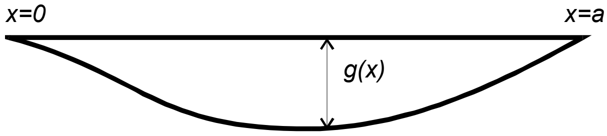
4. EXPERIMENTÁLNA VÝUČBA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

V treťom semestri základného kurzu je pomerne veľa času venovaného diferenciálnym rovniciam. Zaoberáme sa predovšetkým existenciou a algoritmami na nájdenie presného riešenia pre rôzne typy ODR (rozsah 24 hodín prednášok, 18 hodín cvičení). Numerickým metódam sa študenti venujú až v nasledujúcom semestri. Podrobnosti nájdete v prácach [1,2]. Pri klasickom spôsobe výučby bol prednašajúci veľmi často obmedzovaný pri výbere príkladov, zdĺhavosťou riešenia, technickou náročnosťou výpočtu, pričom sa podstata príkladu strácala. Tento problém pomáha vyriešiť práve využitie vhodných programových prostriedkov. V nasledujúcej časti tohoto článku uvádzam niektoré ukážky takto pripravených materiálov pre názornejšiu výučbe okrajových úloh ODR.

Pre experimentálnu výučbu diferenciálnych rovníc v rámci nášho experimentu boli spracované nasledovné témy: pojem riešenia rovnice, začiatočná úloha, separovaná a separovateľná dif. rov., diferenciálny operátor, lineárna dif. rov. druhého rádu, nehomogénne rovnice, Bernouliho, exaktná a homogénna dif. rov., metóda neurčitých koeficientov, variácia konštánt, Laplaceova transformácia, riešenie dif. rov. pomocou radov, numerické riešenie dif. rov. 1. rádu jednokrokovými aj viac-krokovými metódami [2,4]. Väčšinu materiálov možno nájsť na našom ftp serveri, v odkazoch www-stránky, resp na požiadanie.

4.1. Motivačný príklad

Jedným z častých motivačných príkladov pre okrajové úlohy je nasledovný fyzikálny problém : priehyb dlhej tyče, ktorá je podopretá (upevnená) na jednom, alebo na oboch koncoch tak ako to ukazuje nasledovný obrázok. Formulácia fyzikálneho problému je prevzatá z práce [5]



Predpokladajme tiež, že tyč sa bude prehýbať horizontálne a priehyb môžeme popísať funkciou *g(x).* Tvar tyče v okamihu priehybu je daný grafom funkcie *y(x) = - g(x)* , kde x je vzdialenosť od jedného konca tyče a ~~g je miera pri~~ehybu z rovnovážnej polohy. Okrajovú úlohu, ktorá modeluje túto situáciu môžeme popísať nasledovne:

Nech *m(x)* je moment sily vzhľadom na bod x a *w(x)* je distribučná funkcia hmotnosti. Tieto dve veličiny sú vo vzťahu

$$\frac{d^2m}{dx^2} = w(x) \qquad (1)$$

Od zakrivenia tyče závisí aj moment sily.

$$m(x) = \frac{E.I}{(\sqrt{1+(dg/dx)^2})^3} \cdot \frac{d^2g}{dx^2}$$

kde *E* a *I* sú konštanty vzťahujúce sa na zloženie, veľkosť a tvar prierezu tyče. Táto rovnica je bohužiaľ nelineárna. Pre malé hodnoty *g* menovateľa pravej strany môžeme aproximujme konštantou 1, problém bude ľahšie riešiteľný.Po zjednodušení dostaneme

$$m(x) = E.I.\frac{d^2g}{dx^2}$$

Uvedená rovnica je lineárna, diferencovateľná. Vyjadrime vzťah *m(x)* a *w (x).* Výsledkom je jednoduchá lineárna nehomogénna rovnica 4. tého rádu (1).

$$\frac{d^2m}{dx^2} = E.I.\frac{d^4g}{dx^4} \qquad\qquad E.I.\frac{d^4g}{dx^4} = w(x)$$

Okrajové podmienky môžeme zadať rôznymi spôsobmi. Obyčajne sú dané dve okrajové podmienky pre každý koniec tyče. Pre bod *x = a* máme napríklad možnosti:

a) g(a)=0, $\frac{dg}{dx}(a) = 0$ pevný koniec

b) $\frac{d^2g}{dx^2}(a) = 0$, $\frac{d^3g}{dx^3}(a) = 0$ voľný koniec

c) g(a)=0, $\frac{d^2g}{dx^2}(a) = 0$ jednoducho podoprеté

V nasledujúcom príklade vyšetríme, aký vplyv má konštantná váhová funkcia *w(x)* na riešenie tejto okrajovej úlohy.

Príklad: Riešte rovnicu popisujúcu priehyb tyče na intervale *0 ≤ x ≤ 1, E = I = 1, w (x) = 100* s nasledovnými okrajovými podmienkami: *g(0)=0,* $\frac{dg}{dx}(0) = 0$ a podmienkami a), b), c) pre pravý koncový bod

In[1]:=

```
riesenie1=DSolve[{i e D[g[x],{x,4}] == w, g[0] == 0,
g'[0] == 0,g[1] == 0, g''[1] == 0}, g[x], x]
```

Out[1]=

```
                2         3        4
             w x      5 w x      w x
{{g[x] -> ------ - ------ + ------}}
          16 e i   48 e i   24 e i
```

In[2]:=

```
graf1:=-riesenie1[[1,1,2]]/.{e->1,i->1,w->100}
```

In[3]:=

```
riesenie2=DSolve[{i e D[g[x],{x,4}] == w, g[0] == 0,
g'[0] == 0,g'’[1] == 0, g''’[1] ==0}, g[x], x]
```

Out[3]=

```
               2        3         4
            w x      w x       w x
{{g[x] -> ----- - ----- + ------}}
          4 e i    6 e i   24 e i
```

In[4]:=

```
graf2:=-riesenie2[[1,1,2]]/.{e->1,i-> 1,w->100}
```

In[5]:=

```
riesenie3=DSolve[{i e D[g[x],{x,4}] == w, g[0] == 0,
g'[0] == 0,g’[1] == 0, g''’[1] ==0}, g[x], x]
```

Out[5]=

```
               2        3         4
            w x      w x       w x
{{g[x] -> ----- - ----- + ------}}
          6 e i    6 e i   24 e i
```

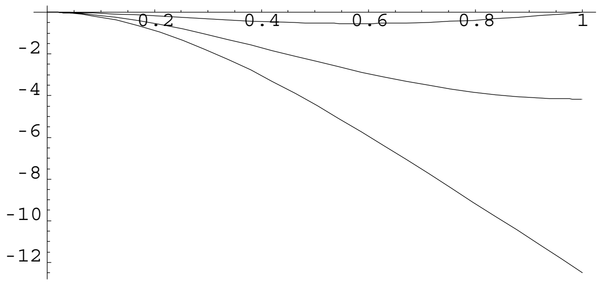
In[6]:=

```
graf3:=-riesenie3[[1,1,2]]/.{e->1,i->1,w->100}
```

Získané riešenia nakreslíme do samostatného obrázka.

In[7]:=

```
Plot[{graf1,graf2,graf3},{x,0,1},PlotStyle->{GrayLevel[0],
GrayLevel[0.3], GrayLevel[0.6],Dashing[{0.5}]},
PlotRange->All]
```



Out[7]= -Graphics-

Možnosti Mathematice však nie sú obmedzené len na konštantnú pravú stranu, rovnako, ako sme nemuseli uvažovať zjednodušenie pôvodnej nelineárnej rovnice. Pre nedostatok miesta však tieto variácie príkladu neuvádzame. Takéto jednoduché a pohodlné modelovanie zlepší názornú predstavu študenta.

Mathematica pri výučbe diferenciálnych rovníc umožňuje postupovať dvoma základnými cestami:

Simulovať priebeh výpočtu: napr. pri diferenciálnych rovniciach 1.rádu s pravou stranou to znamená vyriešiť separáciou rovnicu bez pravej strany (osobitne integrovať ľavú a pravú stranu), v riešení previesť variáciu konštánt, dosadiť, separovať a nájsť riešenie aj s pravou stranou, prípadne dosadiť počiatočné podmienky. Tento postup je veľmi výhodný, najmä na cvičeniach, upevňuje správne techniky počítania a umožňuje precvičiť myšlienku výpočtu. Bolo by však nesmierne únavné, keby pedagóg pri príprave na cvičenie musel pri hľadaní vhodných úloh tento postup neustále opakovať. Vtedy je vhodnejšie použiť predprogramované balíky.

Použiť predefinované algoritmy: DSolve, NDSolve, a ďalšie pomocné balíky vytvorené pedagógom s presne stanoveným cieľom. Príprava výučby je natoľko pohodlná, že skúsenému pedagógovi (s minimálnou programovou zručnosťou) nezaberie veľa času. Tento postup naviac umožňuje predkladať a riešiť aj ťažšie fyzikálne problémy , či problémy stability úloh. Výrazným spôsobom posúva hranicu, ktorú zvažuje pedagóg pri zaradení príkladu: význam $\leftrightarrow$ časová náročnosť. To som sa samozrejme ešte vôbec nezmienila o možnosti hľadať numerické riešenie. Táto téma je popísaná aj v [2].

5.ZÁVER

Zostáva už len pripomenúť výhody. Jednou z nich je schopnosť symbolickej práce. V súčasnej dobe podporu, v tom rozsahu ako Mathematica, neposkytuje žiaden iný komerčný software.

Ďalšou nesmiernou výhodou je skutočnosť, že Mathematica nie je výukový software. Jej použitie nie je obmedzené len na školské úlohy a preto ak poskytneme študentom možnosť pracovať s takýmto produktom, zlepší sa ich pripravenosť riešiť úlohy praxe.

Ďalšou výhodou je možnosť exportu získaných výsledkov. Pre technikov sú asi najdôležitejšie CAD, 3D Studio, Studio MAX, SoftImage, Matlab a iné. Mathematika má silný potenciál na riešenie závažných úloh, bez nutného zjednodušovania modelovej situácie.

Samozrejmosťou je možnosť linku C-čkových a Fortranovských knižníc.

O ostatných výhodách a nesmiernych možnostiach programu by sme mohli písať ešte veľmi dlho, to ale nie je cieľom nášho článku. Záujemcov odkazujem na www.wri.com, či mnohé iné.

Literatúra

1. Halada, L.: Stabilita úloh a algoritmov vo výučbe numerickej matematiky na SjF STU, Informatika a Algoritmy, Prešov, 3. -4. September 1998.
2. Halada, L.; Kováčová, M.: Skúsenosti s použitím programového systému Mathematica pri výučbe numerickej matematiky na Sjf STU, Matematická štatistika a Numerická Matematika, Kálnica, 1. - 5. Júna 1998.
3. Kolesárová, A.; Kováčová, M.; Záhonová, V.:Použitie programového systému Mathematica pri výučbe základov matematickej analýzy na Sjf STU, Matematická štatistika a Numerická Matematika, Kálnica,1. - 5. Júna 1998.
4. Kováčová, M.: Prípravné materiály experimentálnej výučby na SjF STU.
5. Samarskij, A.A.; Tichonov, A.N.: Sbornik zadač po matematičekoj fyzike, Nauka Moskva, 1972.
6. Wolfram Research: The Mathematica Book 3rd ed.,Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.
7. Záhonová, V.: Výučba integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej s podporou programového systému Mathematica, In.:25 VŠTEP-Z Matematika v inžinierskom vzdelávaní, Trnava, 7. - 10. September 1998.