Zborník konferencie o vyučovaní matematiky na VŠ pomocou programového systému firmy

WOLFRAM RESEARCH, INC. USA
MATHEMATICA®

MATHEMATICA '99

METRICKÉ ÚLOHY V PRIESTORE

Monika ĎURIKOVIČOVÁ[1]

Katedra Matematiky, Strojnícka fakulta STU,

Abstrakt: *Popisujeme možnosti použitia programového systému Mathematica pri riešení špeciálnych metrických úloh v priestore E_3*

Keywords: *vzdialenosť bodu od lineárnej variety v E_3 , Grammov determinant, kvadratická plocha*

1. ÚVOD

Vlastnosti kvadratických plôch úzko súvisia s vlastnosťami kužeľosečiek, pretože rovina, ktorá nepatrí kvadratickej ploche, pretne ju v kužeľosečke. Je známe, že regulárne kužeľosečky sú množinami tých bodov v rovine, ktorých pomer vzdialeností od pevného bodu a pevnej priamky (s bodom neincidujúcej) je konštantný. Tento fakt sa dá v priestore E_3 zovšeobecniť, čiže kvadratické plochy v E_3 môžme definovať pomocou vzdialeností..

V článku vytvárame algoritmus, na základe ktorého je možné ľahko hľadať množiny bodov priestoru E_3 definované pomocou vzdialeností bodu od dvoch pevne daných objektov. V úlohách tohto typu vyjadrením vzdialeností spolu s danou podmienkou vždy dostaneme kvadratickú rovnicu v premenných x, y, z. Teda hľadaná množina je kvadratická plocha v E_3 . Využívame niektoré vlastnosti kvadratických plôch aj ich klasifikáciu, pričom nás zaujímajú najmä reálne a regulárne plochy. Pretože pracujeme so vzdialenosťou bodov v euklidovskom priestore, bude každá súradnicová sústava karteziánska.

2. APLIKÁCIA V PROGRAME MATHEMATICA

Riešenie úlohy má vždy dve hlavné časti. Najprv nájdeme vzdialenosť bodu X = [x,y,z] od daných objektov. Vzdialenosť bodu X od priamky *p* zistíme pomocou Grammovho determinantu G:

[1] Mgr. Ďurikovičová Monika, Katedra Matematiky, Strojnícka fakulta STU, Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava, durikovi@dekan.sjf.stuba.sk

$$d(X,p)=\sqrt{\frac{G(s_p, X-P)}{G(s_p)}}\ ,$$

kde s_p je smerový vektor priamky *p* a bod $P \in p$. [1] Túto vzdialenosť si definujeme ako funkciu d(p,r):

```
G1[p_] : = p.p
G2[p_,r_] : = Det[{{p.p,p.r},{r.p,r.r}}]
d[p_,r_] : = Sqrt[G2[p,r]/G1[p]]                                  [[1b]]
```

(p je smerový vektor priamky, vektor r = X-P).
V druhej časti riešenia zistíme aký druh kvadratickej plochy je popísaný nájdenou rovnicou splňujúcou vyžadovanú podmienku. Venujme sa bližšie tomuto rozboru kvadratickej plochy a spôsobu, akým je možné vykonať ho pomocou programového systému Mathematica.

Postupne si budeme definovať funkcie a výrazy potrebné pre našu úlohu. V analytickom rozbore plochy často potrebujeme poznať, či nejaký výraz nadobúda hodnotu nula alebo rôznu od nuly. V prípade odmocninového výrazu nie je vhodná operácia „==“ alebo „!=“ .Vtedy môžeme brať do úvahy numerickú hodnotu výrazu, alebo môžme definovať novú pomocnú funkciu *Zero*, kde využijeme skutočnosť, že:

$$\text{výraz} = 0 \Leftrightarrow (\text{výraz} \geq 0 \wedge \text{výraz} \leq 0)\,.$$

```
Zero[w_] : = NonNegative[w]&&Positive[w]==False                   [[1a]]
```

Funkcia *Zero* nadobúda hodnotu *true*, ak w = 0, inak nadobúda hodnotu *false*.

Množina všetkých bodov v E_3 , súradnice ktorých vyhovujú rovnici

$$f(x,y,z)=0,$$

kde f je funkcia premenných x, y, z sa nazýva *plochou* v E_3 . Špeciálne, všeobecný tvar rovnice plochy druhého stupňa, je

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +& \\ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

(stručne f(x,y,z)=0). Všetky koeficienty sú reálne čísla.

Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sa nazýva diskriminant kvadratickej plochy. Ľavú stranu rovnice (1) definujeme ako funkciu f(x,y,z) a pomocou nej diskriminant A. Keďže f je funkcia troch premenných, príkazom *Coefficient* nevieme správne určiť koeficient funkcie f pri lineárnych členoch (teda pri x, y, z) ani jej absolútny člen. Definujme preto najprv koeficienty pri kvadratických členoch funkcie. Potom vytvoríme pomocnú funkciu *fpom*, kde vystupujú lineárne členy a absolútny člen funkcie f, takže môžeme definovať koeficienty a_{14}, a_{24}, a_{34} a nakoniec, rovnako pomocou *fpom*, nájdeme koeficient a_{44}. Z toho už ľahko vypočítame determinant A.

```
a12 : = Coefficient[f[x,y,z],x*y]/2
a13 : = Coefficient[f[x,y,z],x*z]/2
a23 : = Coefficient[f[x,y,z],y*z]/2
a11 : = Coefficient[f[x,y,z],x^2]
a22 : = Coefficient[f[x,y,z],y^2]
a33 : = Coefficient[f[x,y,z],z^2]

fpom[x_,y_,z_]:= f[x,y,z]-a11*x^2-a22*y^2-a33*z^2-2*a12*x*y-2*a13*x*z-2*a23*y*z      [[2]]
a14 : = Coefficient[fpom[x,y,z],x]/2
a24 : = Coefficient[fpom[x,y,z],y]/2
a34 : = Coefficient[fpom[x,y,z],z]/2

a44 : = fpom[x,y,z]-2*a14*x-2*a24*y-2*a34*z
m : = {{a11,a12,a13,a14},{a12,a22,a23,a24},{a13,a23,a33,a34},{a14,a24,a34,a44}}
A = Det[m]                                                                               [[3]]
```

Budeme potrebovať i subdeterminant *subdet44* determinantu A prislúchájúci k prvku a_{44}.

```
m44 : = {{a11,a12,a13},{a12,a22,a23},{a13,a23,a33}}
subdet44 = Det[m44]                                                                      [[4]]
```

Bod, ktorý je stredom súmernosti plochy sa nazýva *stred* plochy. Bod priestoru je stredom kvadratickej plochy práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú rovniciam

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, \text{ kde } \quad \begin{aligned} f_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ f_2 &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ f_3 &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned}$$

Kvadratická plocha, ktorá má jediný stred sa nazýva stredová, inak nestredová. Z toho pre stredovú kvadratickú plochu platí : $sub\det 44 \neq 0$, pre nestredovú je $sub\det 44 = 0$.
Teda stred plochy hľadáme iba v prípade stredovej plochy.

```
If[subdet44!=0,f1 : =  a11*x+a12*y+a13*z+a14;
        f2 : = a12*x+a22*y+a23*z+a24;
        f3 : = a13*x+a23*y+a33*z+a34;                                                    [[5]]
        Solve[{f1==0,f2==0,f3==0},{x,y,z}]
  ]
```

Venujme sa bližšie regulárnym kvadratickým plochám. Smer osi (u,v,w) kvadratickej plochy (priamka, podľa ktorej je plocha súmerná) musí spĺňať sústavu rovníc (ρ je pomocná reálna premenná):

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\rho)u + a_{12}v + a_{13}w &= 0 \\
a_{12}u + (a_{22}-\rho)v + a_{23}w &= 0 \\
a_{13}u + a_{23}v + (a_{33}-\rho)w &= 0 \\
u^2 + v^2 + w^2 &= 1
\end{aligned} \tag{2}
$$

Každý smer vyhovujúci týmto rovniciam sa nazýva hlavný smer. Aby sústava (2) mala nenulové riešenie (u,v,w) musí platiť:

$$
D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{3}
$$

Túto rovnosť nazývame kubická rovnica pre hlavné smery. Sú ňou určené hlavné smery kvadratickej plochy. Jej všetky tri korene sú reálne. Keďže ρ sú vlastné hodnoty matice $m_{44,}$ môžme ich vypočítať aj takto jednoducho:

vlastnehodnoty : = Eigenvalues[m44]
ro1 = vlastnehodnoty[[1]]
ro2 = vlastnehodnoty[[2]] [[6]]
ro3 = vlastnehodnoty[[3]]

Dá sa dokázať [1] :

1. ak má rovnica (3) jeden koreň jednoduchý, jeden dvojnásobný (nulový), je kvadratická plocha *parabolický valec* alebo dvojica rovnobežných rovín (rôznych alebo totožných).
2. ak je kvadratická plocha nestredová má rovnica (3) aspoň jeden nulový koreň.

Rovnicu každej kvadratickej plochy možno zjednodušiť použitím hlavných smerov. Keďže každá kvadratická plocha má aspoň jednu trojicu hlavných smerov navzájom kolmých, môžeme zvoliť súradnicové osi tak, aby mali tieto smery. Smer prvej súradnicovej osi nech zodpovedá koreňu ρ_1, smer druhej súradnicovej osi koreňu ρ_2 a smer tretej súradnicovej osi koreňu ρ_3. Obmedzíme sa pri tom na reálne plochy.

A) Ak kvadratická plocha je stredová, posuňme súradnicový systém tak, aby jeho počiatok bol v strede plochy. Dá sa ukázať, že potom rovnicu stredovej plochy druhého stupňa možno upraviť na normálny tvar $\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \frac{A}{sub\det 44} = 0,$ (4)

kde A je diskriminant kvadratickej plochy a subdet44 jeho subdeterminant (subdet44≠0).

1. Nech A=0, potom kvadratická plocha je *kužeľová*. [[8a]]
2. Nech A≠0, potom je plocha regulárna.
   2.1. Ak majú všetky korene ρ_1, ρ_2, ρ_3 rovnaké znamienka a $\frac{A}{sub\det 44}$ je opačného znamienka ako tieto korene, je plocha *elipsoid*. [[8b]]

2.2. Ak korene ρ_1, ρ_2, ρ_3 nemajú rovnaké znamienka,plocha je *hyperboloid* (jednodielny alebo dvojdielny). [[8c]]

B) Nech kvadratická plocha je <u>nestredová</u>. Predpokladajme, že len jeden koreň rovnice pre hlavné smery je nulový (2 nenulové ρ uložíme do ρ_{11} a ρ_{22}) [[8e]]. Ak posunieme počiatok súradnicovej sústavy do bodu $[x_0,y_0,0]$, rovnicu plochy možno písať v tvare:

$$\rho_{11}x^2 + \rho_{22}y^2 + 2ll_{34}z + a'_{44} = 0, \tag{5}$$

pričom pre ll_{34} platí: $ll_{34} = \sqrt{-\frac{A}{\rho_{11}\cdot\rho_{22}}}$ (A je diskriminant pôvodnej plochy), a a'_{44} je nejaká konštanta.

1. Nech A = 0, potom aj $ll_{34}=0$ a rovnica (5) popisuje *valcovú plochu*. [[8f]]
2. Nech $A\neq 0$, potom aj $ll_{34}\neq 0$. Posuňme začiatok súradnicovej sústavy do bodu $[0,0,-\frac{a'_{44}}{2ll_{34}}]$.

Teda rovnica (5) bude mať normálny tvar

$$\rho_{11}x^2 + \rho_{22}y^2 + 2ll_{34}z = 0, \tag{6}$$

ktorý vyjadruje regulárnu kvadratickú plochu.

2.1. Ak korene ρ_{11}, ρ_{22} majú rovnaké znamienko, rovnicou (6) je popísaný *eliptický paraboloid*. [[8g]]

2.2. Ak majú korene ρ_{11}, ρ_{22} rôzne znamienka, rovnica (6) popisuje *paraboloid hyperbolický*. [[8g]]

Koeficient ll_{34} zisťujeme iba , v prípade, že práve jeden koreň rovnice (3) je nulový, lebo inak ho nepotrebujeme.

```
If [Zero[ro1*ro2*ro3],
   (ll34 : = Sqrt[-A/(ro1*ro2)]
          /; Zero[ro1]==False && Zero[ro2]==False ;
    ll34 : = Sqrt[-A/(ro1*ro3)]
          /; Zero[ro1]==False && Zero[ro3]==False ;                [[7]]
    ll34 : = Sqrt[-A/(ro2*ro3)]
          /; Zero[ro2]==False && Zero[ro3]==False)
 ]
```

Ak má rovnica kvadratickej plochy normálny (kanonický) tvar, je jednoduché určiť typ plochy.

V inom prípade zhrňme analytický rozbor plochy takto:

A)Ak je plocha stredová, stačí nájsť korene rovnice pre hlavné smery a hodnotu diskriminantu A, aby sme mohli podľa rovnice (4) napísať normálny tvar rovnice tejto plochy. Z neho možno priamo určiť o aký druh kvadratickej plochy ide. Pomocou príkazu [[5]] nájdeme stred plochy.

B)Ak je hľadaná plocha nestredová, riešime kubickú rovnicu pre hlavné smery. Ak táto rovnica má ďalší nulový koreň okrem jedného známeho, ide o parabolický valec [[8d]]. Ak má kubická rovnica pre hlavné smery iba jeden nulový koreň a zároveň $ll_{34}=0$, je plocha opäť valcová - eliptická alebo hyperbolická (podľa znamienok ρ_{11} a ρ_{22}). Keď $ll_{34}\neq 0$ a kubická rovnica pre ρ má iba jeden nulový koreň je hľadaná plocha paraboloid. Opäť podľa znamienok ρ_{11} a ρ_{22} zistíme, či je to paraboloid hyperbolický, či eliptický. Pomocou nenulových koreňov ρ a koeficientu ll_{34} napíšeme normálny tvar rovnice hľadanej plochy (6).

Podľa hore uvedeného možeme zostaviť algoritmus pre analytický rozbor kvadratickej plochy:

```
If[A44!=0,
  If[A==0,s:="kuzelova",                                          [[8a]]
        If[Sign[ro1]==Sign[ro2]==Sign[ro3]
                && Sign[A/A44]==-Sign[ro1],
          s : = "elipticka",                                       [[8b]]
         If[Negative[-A^3/(ro1*ro2*ro3*(A44^3))],
                 s : = "jednodielny hyperboloid",
                 s : = "dvojdielny hyperboloid"                    [[8c]]
          ]
         ]
   ],
  If[(Zero[ro1]&&Zero[ro2])||(Zero[ro1]&&Zero[ro3])||
                    (Zero[ro2]&&Zero[ro3]),
      s:= "parabolicky valec",                                     [[8d]]

                      If[Zero[ro1*ro2]&&
                        Zero[ro1*ro3],
                         ro11 : = ro2;ro22 : = ro3
                       ];
                      If[Zero[ro1*ro2]&&
                        Zero[ro2*ro3],                             [[8e]]
                         ro11 : = ro1;ro22 : = ro3
                       ];
                      If[Zero[ro3*ro1]&&
                        Zero[ro3*ro2],
                         ro11 : = ro1;ro22 : = ro2
                       ];

      If[Zero[aa34],If[Sign[ro11]==Sign[ro22],
               s : = "valcova plocha elipticka",
               s : = "valcova plocha hyperbolicka"                 [[8f]]
                  ],
               If[Sign[ro11]==Sign[ro22],
                   s : = "elipticky paraboloid",
                   s : = "hyperbolicky paraboloid"                 [[8g]]
                 ]
        ]
   ]
 ]
```

```
Print["Kvadraticka plocha je ",s,"."]
```

Podľa rovníc (4), (6) vieme vytvoriť algoritmus pre napísanie normálneho tvaru rovníc kvadratickej plochy:

```
If[s=="kuzelova",normalnytvar = ro1*x^2+ro2*y^2+ro3*z^2;
            ps:=0
  ]
If[s=="elipticka"||s=="jednodielny hyperboloid"||
              s=="dvojdielny hyperboloid",
   normalnytvar = x^2/(-A/(ro1*subdet44))+
            y^2/(-A/(ro2*subdet44))+z^2/(-A/(ro3*subdet44));
   ps : =1
  ]
If[s=="hyperbolicky paraboloid"||s=="elipticky paraboloid",                [[9]]
   normalnytvar = -ro11*x^2/ll34-ro22*y^2/ll34;
   ps : =2z
  ]
Print[normalnytvar," = ",ps]
```

3. NIEKOĽKO KONKRÉTNYCH PRÍKLADOV

Pri voľbe zadaní využívame fakt, že metrické vlastnosti kvadratických plôch a kužeľosečiek sú invariantné vzhľadom na transformáciu karteziánskej súradnicovej sústavy. Budeme teda súradnicovú sústavu voliť tak, aby sme čo najviac zjednodušili riešenie úlohy.

Predtým ako začneme riešiť úlohy, definujeme si všetky potrebné funkcie: Zero[w] [[1a]] a d[p,X-P] , ktorá určuje vzdialenosť bodu X od priamky p so smerovým vektorom p, pričom P$\in p$ (označujeme ju d(X, p)) [[1b]]. Vzdialenosť bodu X od roviny α označme d(X, α).

Majme v priestore E_3 priamku p a rovinu α. Predpokladajme, že priamka p nie je kolmá na danú rovinu α a $p \not\subset \alpha$, teda môžeme zvoliť karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že súradnicovú rovinu tvorenú prvou a druhou súradnicovou osou stotožníme s rovinou α. Ďalej ju dourčíme tak, aby prienik roviny α a priamky p bol začiatkom súradnicovej sústavy a priamka p ležala v rovine tvorenej druhou a treťou súradnicovou osou.

Príklad 1. Nájdite množinu M všetkých bodov v E_3, pre ktoré vzdialenosť od danej priamky p je $\frac{1}{2}$ - násobkom vzdialenosti od danej roviny α (ktorá je rôznobežná s danou priamkou), pričom

$$\alpha: \ z = 0,$$

$$p: x = 0$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}.\mathrm{v}$$
$$z = \frac{2}{\sqrt{5}}.\mathrm{v},$$

kde v $\in$ R.

Riešenie. Aby bod X = [x,y,z] priestoru E_3 mal požadovanú vlastnosť, musia jeho súradnice spĺňať rovnosť:

$$\mathrm{d}(X, p) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}(X,\alpha),$$

kde d(X,α) = z a d(X, p) vypočítame na základe Grammovho determinantu pomocou časti [[1b]] nášho algoritmu. Definujeme smerový vektor priamky p a vektor (X-[0,0,0]). Potom funkčná hodnota funkcie d[p,r] sa rovná vzdialenosti bodu X od priamky p.

```
In[5]:=
p:={0,1/Sqrt[5],2/Sqrt[5]};
r:={x,y,z}
d[p,r]
Out[7]=
                 2          2
         2    4 y    4 y z   z
Sqrt[x  + ---- - ----- + --]
           5       5     5
```

Z toho po ekvivalentných úpravách dostaneme:

```
In[8]:=
Simplify[(d[p,r])^2-z^2/4==0]
Out[8]=
           2            2
  2    4 y    4 y z    z
 x  + ---- - ----- - -- == 0
        5       5    20
```
(1)

Takže pre množinu M hľadaných bodov máme:

$$M = \{X=[x,y,z]\in E_3;\ x^2 + \frac{4y^2}{5} - \frac{4yz}{5} - \frac{z^2}{20} = 0\}.$$

Už vieme, že rovnica (1) popisuje kvadratickú plochu. Teraz je našou úlohou zistiť jej druh.
K tomu si definujeme ľavú stranu tejto rovnice ako funkciu f, koeficienty diskriminantu A kvadratickej plochy i samotný diskriminant A pomocou algoritmu [[2]], [[3]].

```
In[9]:=
   f[x_,y_,z_]:=  (d[p,r])^2-z^2/4
In[22]:=
   A  =  Det[m]
Out[22]=
   0
```

Ďalej si definujeme subdeterminant subdet44 determinantu A prislúchajúci k prvku a_{44} [[4]] :

```
In[23]:=
   m44  :=  {{a11,a12,a13},{a12,a22,a23},{a13,a23,a33}}
   subdet44  =  Det[m44]
Out[24]=
      1
   -(-)
      5
```

Naša plocha má stred v bode (algoritmus [[5]]) [0,0,0] :

```
Out[25]=
   {{x -> 0,  y -> 0,  z -> 0}}
```

Vyriešime kubickú rovnicu pre hlavné smery [[6]] a spustíme hlavné algoritmy (t.j. [[7]] a [[8]]) pre analytický rozbor kvadratickej plochy. Dostaneme priamo výstup:

```
   Kvadraticka plocha je kuzelova.
```

Pomocou riešenia kubickej rovnice pre hlavné smery plochy a algoritmu [[9]] môžme kužeľovú plochu zapísať v normálnom tvare

```
                              2                     2
    2    (15 - Sqrt[545]) y     (15 + Sqrt[545]) z
   x  + ------------------- + ------------------- = 0
                 40                     40
```

Z kanonického tvaru rovnice vieme vyčítať, či je množina M rotačná. Z doterajších výsledkov vyplýva, že množina M všetkých bodov v E_3, pre ktoré vzdialenosť od danej priamky p je $\frac{1}{2}$ -násobkom vzdialenosti od danej roviny α , je eliptická kužeľová plocha.

Postup je aj v nasledujúcich úlohách rovnaký, takže riešenie budeme uvádzať stručnejšie. Pred každým novým príkladom je treba vyčistiť všetky premenné okrem funkcií d a Zero.

Nech sú dané v E_3 dve navzájom mimobežné a kolmé priamky p, q. Pri voľbe karteziánskej súradnicovej sústavy stotožníme prvú súradnicovú os s priamkou p. Sústavu dourčíme tak, aby priamka q ležala v rovine určenej druhou a treťou osou súradnicovej sústavy a zároveň, aby bola kolmá na druhú súradnicovú os. Pre jednoduchosť zvoľme vzdialenosť priamok *p, q* rovnú 1.

Príklad 2. Nájdite množinu M všetkých bodov v E_3, pre ktoré sa pomer vzdialeností od dvoch daných priamok *p, q* rovná 2.

$$p: x = t \qquad\qquad q: x = 0$$
$$y = 0 \qquad\qquad y = 1 \qquad\qquad t, u \in \mathrm{R}.$$
$$z = 0 \qquad\qquad z = u$$

Riešenie: Nech bod X = [x,y,z] je z množiny M, teda jeho súradnice spĺňajú rovnosť

$$\frac{d(X,p)}{d(X,q)} = 2 \qquad (2)$$

($X \notin p$ a $X \notin q$).

Pre priamku *p* máme:

```
In[5]:=
   p:={1,0,0};
   r:={x,y,z}
In[7]:=
   d[p,r]
Out[7]=
          2     2
   Sqrt[y  + z ]
```

Teda $d(X,p) = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Pre priamku *q*:

```
In[8]:=

   p1:={0,0,1};
   q1:={x,y-1,z}
In[10]:=
   d[p1,q1]
Out[10]=
              2           2
   Sqrt[1 + x  - 2 y + y ]
```

Teda $\quad d(X,q)=\sqrt{x^2+y^2-2y+1}$.

Rovnosť (2) je ekvivalentná s rovnosťou:

```
In[11]:=
   Simplify[-d[p,r]^2+4*d[p1,r1]^2==0]
Out[11]=
            2               2     2
   4 + 4 x   - 8 y + 3 y   - z   == 0
```

(3)

Z toho pre hľadanú množinu máme

$$M = \{X = [x,y,z] \in E_3 ;\ 4x^2+3y^2-z^2-8y+4=0\}.$$

Klasifikácia tejto kvadratickej plochy:

```
In[12]:=
   f[x_,y_,z_]:=Simplify[-d[p,r]^2+4*d[p1,r1]^2]
In[25]:=

   A = Det[m]
Out[25]=
   16
In[26]:=
   m44 := {{a11,a12,a13},{a12,a22,a23},{a13,a23,a33}}
   subdet44 = Det[m44]
Out[27]=
   -12
```

Teda plocha je stredová so stredom, ktorý dostaneme ako výstup [[5]]

```
Out[28]=
                         4
   {{x -> 0, y -> -, z -> 0}}
                         3
```

Analytickým rozborom plochy [[8]] prídeme k záveru:

```
   Kvadraticka plocha je jednodielny hyperboloid.
```

Jej rovnicu možno zapísať v normálnom tvare [[9]]

```
        2       2
   -3 x     9 y        2
   ----- + ---- + 3 z   = 1
     4       4
```
,

z ktorého vidieť, že hyperboloid nie je rotačný.

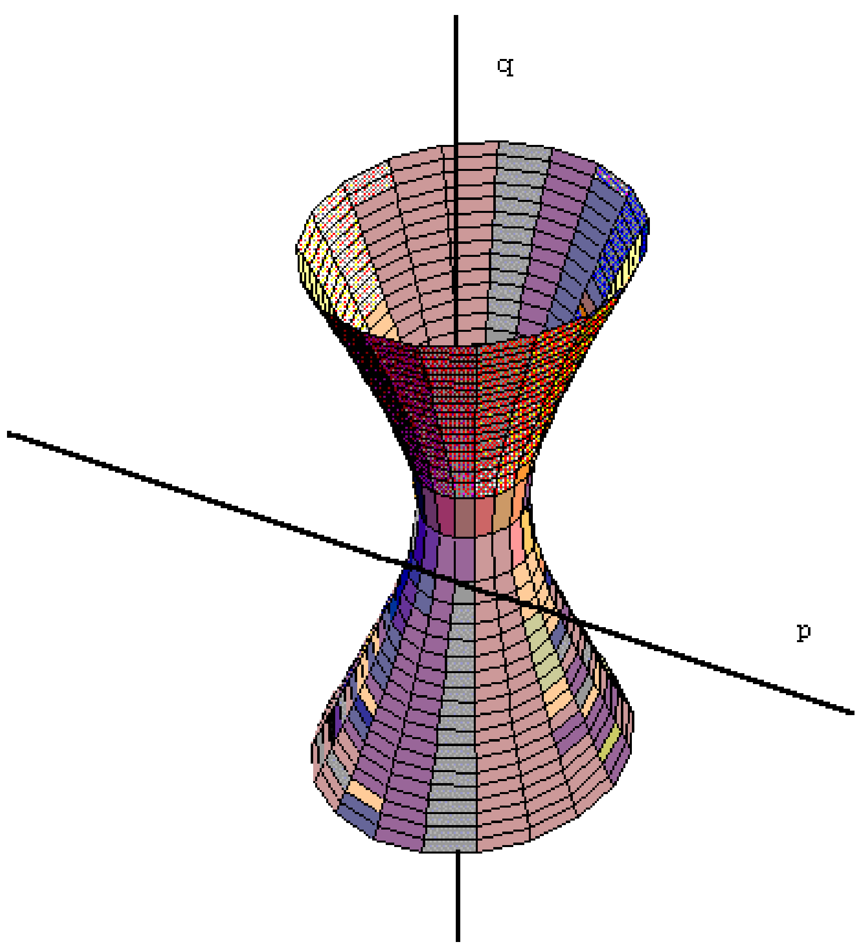
Čiže množina M všetkých bodov v E_3, pre ktoré sa pomer vzdialeností od dvoch daných priamok *p, q* rovná 2, je jednodielny hyperboloid (viď obrázok). Jednodielny hyperboloid ako hľadanú množinu dostaneme aj pre prípad, keď priamka *p* nie je kolmá na priamku *q*.

Nakreslenie obrázku:

```
h1=ParametricPlot3D[{1/Sqrt[3]*(ro*Cos[fi]),2/3*(ro*Sin[fi])+4/3,
        2/Sqrt[3]*Sqrt[ro^2-1]},{ro,1,3},{fi,0,2Pi}]

h2=ParametricPlot3D[{1/Sqrt[3]*(ro*Cos[fi]),2/3*(ro*Sin[fi])+4/3,
        -2/Sqrt[3]*Sqrt[ro^2-1]},{ro,1,3},{fi,0,2Pi}]

hyp=Show[h1,h2,Boxed->False,Axes->None]
ciara1:=Line[{{-5,0,0},{5,0,0}}]
pp:=Graphics3D[ciara1]
ciara2:=Line[{{0,1,-6},{0,1,6}}]
qq:=Graphics3D[ciara2]
a:=Graphics3D[Text[p,{4,1,0}]]
b:=Graphics3D[Text[q,{0,2,5}]]
Show[hyp,pp,qq,a,b,Boxed->False]
```



Majme v E_3 dané dve navzájom mimobežné priamky p, q. Karteziánsku súradnicovú sústavu zvoľme tak, že os daných mimobežiek stotožníme s druhou súradnicovou osou a priamku

p s prvou súradadnicovou osou. Z voľby je jasné, že priamka q je rovnobežná so súradnicovou rovinou obsahujúcou prvý a tretí súradnicový vektor.

Príklad 3. Nájdite množinu M všetkých bodov v E_3, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných priamok p, q .

$$p: x = u \qquad q: x = 3t$$
$$y = 0 \qquad y = \sqrt{7} \qquad \text{t, u} \in \text{R}$$
$$z = 0 \qquad z = 2t$$

Riešenie: Nech bod X=[x,y,z] je ľubovoľný bod v E_3, ktorý spĺňa požadovanú podmienku. Platí d(X, p) = d(X, q). Pre náš prípad :

```
In[11]:=
Simplify[-d[p,r]^2+d[p1,r1]^2==0]
Out[11]=
           2                                2
 91 + 4 x   - 26 Sqrt[7] y - 12 x z - 4 z
 ----------------------------------------- == 0
                    13
In[12]:=
f[x_,y_,z_]=Simplify[(-d[p,r]^2+d[p1,r1]^2)*13]
Out[12]=
           2                                2
 91 + 4 x   - 26 Sqrt[7] y - 12 x z - 4 z
```

Takže body z množiny M majú spĺňať rovnosť: $4x^2 - 4z^2 - 26\sqrt{7}y - 12xz + 91 = 0$.

```
In[26]:=

A = Det[m]
Out[26]=
61516
In[27]:=
m44 := {{a11,a12,a13},{a12,a22,a23},{a13,a23,a33}}
subdet44 = Det[m44]
Out[28]=
0
```

Vidieť, že množina M, je nestredová, preto ani algoritmom [[5]] nedostaneme žiaden výstup. Z [[8]] :

```
Kvadraticka plocha je hyperbolicky paraboloid.
```

A jeho rovnica v normálnom tvare:

```
     2          2
  2 x        2 y
-------- - -------- = 2 z
Sqrt[91]   Sqrt[91]
```

Čiže množina M všetkých bodov v E_3, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných priamok *p, q* je hyperbolický paraboloid.

Literatúra:

1. Bydžovský, B.: *Úvod do analytické geometrie*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956.

2. Hejný, M., Zaťko, V., Kršňák,V.: *Geometria 1,* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1985.

3.Kolesárová, A., Kováčová, M., Záhonová, V.: *Použitie programového systému Mathematica pri výučbe základov matematickej analýzy na Sjf STU*, Matematická štatistika a Numerická matematika, Kálnica 1. - 5. Júna 1998, pp.134-141

4. Kováčová, M., Halada, L.:*Experimentálna výučba numerickej matematiky pomocou programového systému Mathematica na Sjf STU,* Matematická štatistika a Numerická matematika, Kálnica 1. - 5. Júna 1998, pp. 142-150

5. Kováčová, M.: *Možnosti vizualizácie zobrazení pomocou programového systému Mathematica*, Mathematica 99, Bratislava 29.6.-2.7. 1999

6. Wolfram Research : The Mathematica Book 3rd ed., Wolfram Media/ Cambridge University Press, 1996