**Zborník konferencie o vyučovaní matematiky na VŠ pomocou programového systému firmy**

*WOLFRAM RESEARCH, INC. USA*
*MATHEMATICA®*

***MATHEMATICA '99***

# Lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu s konštantnými koeficientami a programový systém MATHEMATICA

Viera Záhonová[1]

Katedra Matematiky, Strojnícka Fakulta STU

***Abstrakt:*** *V príspevku je popísaná možnosť použitia programového systému Mathematica pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu s konštantnými koeficientami v základnom kurze matematiky.*

## 1. Úvod

Vývoj v oblasti výpočtovej techniky ide veľmi rýchlo dopredu a podstatne ovplyvňuje spôsob výučby matematiky na vysokých školách. Základný kurz matematiky na Strojníckej fakulte STU v Bratislave je v prvých štyroch semestroch štúdia v predmetoch Matematika I, Matematika II, Matematika III (základy matematickej analýzy a lineárnej algebry) a Numerická matematika. V školskom roku 1996/97 Katedra matematiky experimentálne začala s výučbou v základnom kurze pomocou programového systému Mathematica od druhého semestra najskôr iba v dvoch pracovných skupinách, ale v školskom roku 1997/98 a 1998/99 už v celej paralelke, t.j. v šiestich pracovných skupinách. Podrobný popis experimentu je uvedený v prácach [4,6] a niektoré poznatky s výučby konkrétnych tématických celkov v prácach [1,2,5,7,8,9,10]. Vzhĺadom na to, že sa jedná o vyučovanie teoretických predmetov vo väčšine prípadov sa dodržiava postupný výpočet. Pripomeňme ešte, že výučba je rozdelená na tzv. teoretické a počítačové cvičenia. Na teoretických cvičeniach sa riešia úlohy jednoduchšie, na počítačových zasa zložitejšie. Je nutné, aby študenti ovládali základné metódy riešenia jednotlivých úloh a taktiež aj všetky základné pojmy, s ktorými pracujú. Práve preto na začiatku každého teoretického cvičenia z matematiky sa píše krátka písomka z pojmov a metód používaných na cvičeniach, výsledky ktorej sú súčasťou celkového hodnotenia študenta pri skúške.

[1] RNDr. Viera Záhonová, CSc., Katedra Matematiky, Strojnícka fakulta STU, Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava, zahonova@dekan.sjf.stuba.sk

## 2. Základné pojmy

Rovnicu $y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+...+a_{n-1}y'(x)+a_ny(x)=r(x)$, (1)

kde $a_i$, $i=1,2,...n$ sú reálne čísla, $y(x)$ je neznáma funkcia, $y^{(i)}(x)$, $i=1,2,...n$ je jej i-tá derivácia a $r(x)$ je funkcia spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ nazývame lineárnou rovnicou n-tého rádu s konštantnými koeficientami. Označme $L_n(x)$ ľavú stranu rovnice (1). Potom túto rovnicu môžeme napísať v tvare $L_n(x)=r(x)$. Ak funkcie $y_i(x)$, $i=1,2,...n$ tvoria fundamentálny systém riešení rovnice $L_n(x)=0$ a $y_0(x)$ je jedno konkrétne riešenie rovnice $L_n(x)=r(x)$, potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $L_n(x)=r(x)$ je $y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)+y_0(x)$, kde $c_i$, $i=1,2,...,n$ sú ľubovoľné reálne čísla. Riešenie $y_0(x)$ vo všeobecnosti nájdeme metódou variácie konštánt, t. j. hľadáme ho v tvare $y_0(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)$, kde funkcie $c_i(x)=\int\frac{|w_i|}{|w|}dx$, pre $i=1,2,...,n$, $|w|$ je Wronského determinant, a $|w_i|$ je determinant matice $w_i$, ktorú dostaneme z Wronského matice w, ak v i-ty stĺpec v matici w nahradíme stĺpcom núl, až na posledný prvok, ktorý nahradíme funkciou $r(x)$ [3].

## 3. Riešenie diferenciálnej rovnice

Na experimentálnych cvičeniach z matematiky sme s podporou programového systému MATHEMATICA najskôr teda hľadali fundamentálny systém riešení rovnice bez pravej strany a potom metódou variácie konštánt jedno riešenie rovnice s pravou stranou. Túto metódu sme použili aj v tom prípade, keď pravá strana rovnice bola špeciálnou, respektíve súčtom špeciálnych pravých strán. Riešenie jednoduchých diferenciálnych rovníc druhého rádu, či už so špeciálnou pravou stranou, alebo s pravou stranou, ktorá nemala špeciálny tvar,študenti museli zvládnuť aj bez pomoci počítača. Na počítačových cvičeniach sme sa zamerali hlavne na diferenciálne rovnice tretieho rádu, kde už niekedy vzniká problém pri vyriešení charakteristickej rovnice, potrebnej na nájdenie fundamentálneho systému riešení a tiež aj pri výpočte Wronského determinantu $|w|$ a pomocných determinantov $|w_i|$, ako aj pri samotnom integrovaní.

Úloha: Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y'''-4y''+6y'-4y=e^{2x}\cos x$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$. Nakreslite prislúchajúcu integrálnu krivku a vypočítajte hodnotu hodnotu $y(0{,}5)$.

Riešenie: Najskôr nájdeme korene charakteristickej rovnice

*In[1]:=*

```
Solve[s^3-4s^2+6s-4==0,s]
```

*Out[1]=*

```
{{s -> 1 - I}, {s -> 1 + I}, {s -> 2}}
```

Koreňom charakteristickej rovnice $s_1 = 2,\ s_2 = 1 + i,\ s_3 = 1 - i$ priradíme lineárne nezávislé riešenia, ktoré tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice. Definujeme:

*In[2]:=*

```
y1[x_]=Exp[2x]
```

*Out[2]=*

```
 2 x
E
```

*In[3]:=*

```
y2[x_]=Exp[x]*Cos[x]
```

*Out[3]=*

```
 x
E  Cos[x]
```

*In[4]:=*

```
y3[x_]=Exp[x]*Sin[x]
```

*Out[4]=*

```
 x
E  Sin[x]
```

Všeobecné riešenie rovnice $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$ je

*In[5]:=*

```
yh[x_]=c1*y1[x]+c2*y2[x]+c3*y3[x],
```

*Out[5]=*

```
    2 x        x              x
c1 E    + c2 E  Cos[x] + c3 E  Sin[x]
```

kde c1,c2,c3 sú ľubovoľné reálne čísla.
Vzhľadom na to, že v ďalšom budeme pracovať aj s pravou stranou rovnice, zadefinujme si ju.

*In[6]:=*

```
r[x_]=Exp[2x]*Cos[x]
```

*Out[6]=*

```
 2 x
E    Cos[x]
```

Vytvoríme Wronského maticu w

*In[7]:=*

```
v={y1[x],y2[x],y3[x]};
```

*In[8]:=*

```
w={v,D[v,x],D[v,x,x]};
```

a overíme si, či ju máme správne zadefinovanú.

*In[9]:=*

```
MatrixForm[w]
```

*Out[9]//MatrixForm=*

$$\begin{pmatrix} E^{2x} & E^x \text{Cos}[x] & E^x \text{Sin}[x] \\ 2 E^{2x} & E^x \text{Cos}[x] - E^x \text{Sin}[x] & E^x \text{Cos}[x] + E^x \text{Sin}[x] \\ 4 E^{2x} & -2 E^x \text{Sin}[x] & 2 E^x \text{Cos}[x] \end{pmatrix}$$

Vypočítame jej determinant, ktorý hneď upravíme a zjednodušíme príkazom Simplify.

*In[10]:=*

```
dw=Det[w]//Simplify
```

*Out[10]=*

$$2\ E^{4\ x}$$

Definujeme si pomocnú maticu w1 tak, že v matici w nahradíme prvok v i-tom riadku, i=1,2,3 a prvom stĺpci postupne prvkami 0, 0, r[x].

*In[11]:=*

```
w1=w;w1[[1,1]]=0;w1[[2,1]]=0;w1[[3,1]]=r[x];
```

Overíme si, že matica w1 je správne zadefinovaná

*In[12]:=*

```
MatrixForm[w1]
```

***Out[12]//MatrixForm=***

$$\begin{pmatrix} 0 & E^x \text{Cos}[x] & E^x \text{Sin}[x] \\ 0 & E^x \text{Cos}[x] - E^x \text{Sin}[x] & E^x \text{Cos}[x] + E^x \text{Sin}[x] \\ E^{2x} \text{Cos}[x] & -2 E^x \text{Sin}[x] & 2 E^x \text{Cos}[x] \end{pmatrix}$$

a vypočítame jej determinant.

*In[13]:=*

```
dw1=Det[w1] //Simplify
```

*Out[13]=*

$$E^{4\ x}\ \text{Cos}[x]$$

Podobne postupujeme aj pri definícii a výpočte determinantov matíc w2 a w3.

*In[14]:=*

```
w2=w;w2[[1,2]]=0;w2[[2,2]]=0;w2[[3,2]]=r[x];dw2=Det[w2]//Simplify
```

*Out[14]=*

```
    5 x
-(E    Cos[x] (Cos[x] + Sin[x]))
```

*In[15]:=*

```
w3=w;w3[[1,3]]=0;w3[[2,3]]=0;w3[[3,3]]=r[x];dw3=Det[w3]//Simplify
```

*Out[15]=*

```
 5 x
E    Cos[x] (Cos[x] - Sin[x])
```

Potom funkcie

*In[16]:=*

```
c1[x_]=Integrate[dw1/dw,x]//Simplify,
```

*Out[16]=*

```
Sin[x]
------
  2
```

*In[17]:=*

```
c2[x_]=Integrate[dw2/dw,x]//Simplify,
```

*Out[17]=*

```
 x
E  (-5 + Cos[2 x] - 3 Sin[2 x])
-------------------------------
              20
```

*In[18]:=*

```
c3[x_]=Integrate[dw3/dw,x]//Simplify.
```

*Out[18]=*

```
 x
E  (5 + 3 Cos[2 x] + Sin[2 x])
------------------------------
              20
```

Riešenie $y_0(x)$ má potom tvar

*In[19]:=*

```
y0[x_]=c1[x]*y1[x]+c2[x]*y2[x]+c3[x]*y3[x]//Simplify.
```

*Out[19]=*

```
    2 x
-(E    (Cos[x] - 3 Sin[x]))
---------------------------
             5
```

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je dané

*In[20]:=*

```
y[x_]=yh[x]+y0[x]
```

*Out[20]=*

```
                                 2 x
      2 x         x              E    (Cos[x] - 3 Sin[x])        x
c1 E     + c2 E  Cos[x] - ------------------------ + c3 E  Sin[x]
                                      5
```

Našou úlohou je však nájsť konkrétne riešenie, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky. To znamená, že musíme nájsť konštanty c1, c2, c3 tak, aby boli splnené podmienky $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$. Preto riešime nasledujúci systém rovníc vzhľadom na neznáme c1, c2, c3.

*In[21]:=*

```
Solve[{y[0]==0,y'[0]==0,y''[0]==0},{c1,c2,c3}]
```

*Out[21]=*

```
              1          7          1
{{c1 -> -(-), c2 -> --, c3 -> --}}
              2          10         10
```

Do všeobecného riešenia dosaďme teraz za konštanty c1, c2, c3 vypočítané hodnoty. Dostaneme konkrétne riešenie.

*In[22]:=*

```
y[x_]=y[x]/.{c1->-1/2,c2->7/10,c3->1/10}//Simplify
```

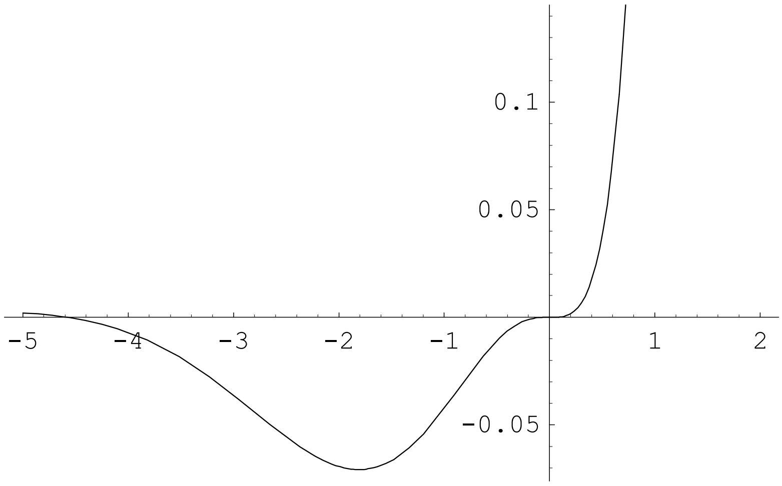
*Out[22]=*

```
   x      x             x                    x
-(E  (5 E  + (-7 + 2 E ) Cos[x] - (1 + 6 E ) Sin[x]))
-----------------------------------------------------
                         10
```

Nakreslíme si jeho graf a vypočítame danú funkčnú hodnotu.

*In[23]:=*

```
Plot[y[x],{x,-5,2}]
```




*Out[23]=*

```
-Graphics-
```

*In[24]:=*

```
y[0.5]//N
```

*Out[24]=*

```
0.0375502
```

Danú diferenciálnu rovnicu sme mohli vyriešiť aj priamo, pomocou príkazu DSolve. Konkrétne, jej všeobecné riešenie nájdeme zadaním príkazu

$$DSolve[L_n[x] == r[x], y[x], x]$$

a riešenie diferenciálnej rovnice spĺňajúce zadané začiatočné podmienky pomocou príkazu

$$DSolve[\{L_n[x] == r[x], y[x_0] == y_0, y'[x_0] == y_1, \ldots y^{(n-1)}[x_0] == y_{n-1}\}, y[x], x]$$

Veľakrát však, keď charakteristická rovnica má komplexné korene, riešenie vyjde v tvare komplexnej funkcie. Toto riešenie nedáva študentom Strojníckej fakulty STU nič konkrétne, pretože v osnovách základného kurzu sa funkcia komplexnej premennej nenachádza. Taktiež chceme, aby študenti v základnom kurze pochopili podstatu nájdenia riešenia diferenciálnej rovnice. O tomto príkaze študentov informujeme a môžu si pomocou neho skontrolovať (pokiaľ riešenie je reálne) nájdené riešenie, a tiež môžu daný príkaz používať buď pri svojom štúdiu vo vyšších ročníkoch, alebo v praxi.

## 4. Záver

Na záver by bolo vhodné ešte pripomenúť, že programový systém Mathematica nenahrádza výučbu matematiky. Vhodnou voľbou tématických celkov je tento programový systém pomôckou, ktorá urýchľuje, niekedy veľmi zdĺhavé, mechanické počítanie, dáva väčšiu možnosť výberu vhodných a náročnejších príkladov, ktoré na teoretických cvičeniach nie je možné riešiť. Vyhľadom na ušetrený čas pri výpočtoch sa vo väčšej miere dajú formulovať úlohy, ktoré podporujú logické myslenie študenta. Programový systém Mathematica má veľmi dobrý grafický výstup, a preto sa cvičenia z matematiky dajú urobiť zaujímavejšie. Študenti, ktorí absolvovali cvičenia z matematiky pomocou tohto programového systému, pracujú s ním naďalej a používajú ho pri riešení úloh z odborných predmetov. Predpokladáme, že Mathematicu budú používať aj v praxi, pri riešení konkrétnych problémov.

**Literatúra:**

[1] Halada L.: Skúšanie pomocou počítača, Matematická štatistika a Numerická matematika, Kočovce 14.-18.6.1999,pp.
[2] Halada L.: Použitie systému Dotest pri výučbe a skúšaní matematiky, ***MATHEMATICA 99***, Bratislava 29.6-2.7.1999,pp.
[3] Ivan J.: Matematika 2, Alfa, Bratislava, 1989
[4] Kolesárová A., Kováčová M., Záhonová V.: Použitie programového systému Mathematica pri výučbe základov matematickej analýzy na SjF STU, Matematická štatistika a Numerická matematika, Kálnica 1.-5. 6.1998, pp.134-141
[5] Kolesárová A.: Výučba Fourierovych radov s podporou programového systému Mathematica, ***MATHEMATICA 99***, Bratislava 29.6-2.7.1999,pp.
[6] Kováčová M., Halada L.: Experimentálna výučba numerickej matematiky pomocou programového systému Mathematica na SjF STU, Matematická štatistika a Numerická matematika, Kálnica 1.-5. 6.1998, pp.142-150
[7] Kováčová M.: Možnosti nového prístupu ku výučbe dif. rovníc na technických univerzitách, Proceedings of the scientific conference with international participation, INFORMATICS AND ALGORITHMS´98, Prešov 3.-4.9.1998,pp. 278-291
[8] Kováčová M.: Výučba diferenciálneho počtu funkcie viac premenných pomocou pg. systému Mathemetica, Zborník 25. konferencia VŠTEZ – Matematika v inžinierskom vzdelávaní, Trnava 7.-10.9.1998, pp. 173-180
[9] Kováčová M.: Numerické riešenie dif. rovníc a systémovpomocou numerických funkcií systému Mathematica, ***MATHEMATICA 99***, Bratislava 29.6-2.7.1999,pp.
[10] Omachelová M.: Skúsenosti s výučbou extrémov funkcie viac premenných s využitím programového systému Mathematica, INFORMATICS AND ALGHORITHMS´99, Prešov 9.-10.9.1999